NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 1/4

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/ABo2m52oEYw

Les nombres complexes prennent naissance au XVIème siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.
En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de *Cardan* sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.
A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.
La notation *i* apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.
Au XIXe siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

Partie 1 : L'ensemble $\mathbb{C}$

1) Définition

Définition : Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre *i* tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.

Exemples :
$3 + 4i$; $-2 - i$; $\frac{i}{3}$ sont des nombres complexes. Et les nombres réels 0, -2 ou $\sqrt{3}$ sont également des nombres complexes !

Vocabulaire :
- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et la nombre b s'appelle la **partie imaginaire**. On note : $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$.

Remarques :
- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors z est un nombre imaginaire pur.

Méthode : Effectuer des calculs sur les nombres complexes

Vidéo https://youtu.be/-aaSfL2fhTY
Vidéo https://youtu.be/1KQIUqzVGqQ

Simplifier les écritures en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ $\quad z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$ $\quad z_3 = (2 - 3i)^2$

$z_4 = (2i)^{13}$ $\quad z_5 = \dfrac{1}{4 - 2i}$ $\quad z_6 = \dfrac{1 + i}{2 - i}$

Correction

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4) = 3 - 5i - 3i + 4 = 7 - 8i$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i) = -3 + 15i + 2i - 10i^2 = -3 + 15i + 2i + 10 = 7 + 17i$$

$$z_3 = (2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$$

$$z_4 = (2i)^{13} = 2^{13}i^{13} = 8\,192 \times (i^2)^6 \times i = 8\,192 \times (-1)^6 \times i = 8\,192\,i$$

$$z_5 = \frac{1}{4 - 2i} = \frac{4 + 2i}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{4 + 2i}{16 - 4i^2} = \frac{4 + 2i}{16 + 4} = \frac{4 + 2i}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$$

$$z_6 = \frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 2i - 1}{4 - i^2} = \frac{1 + 3i}{4 + 1} = \frac{1 + 3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Propriétés :
a) Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
b) Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Démonstration :
Conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

Partie 2 : Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a - ib$.

<u>Exemples :</u>
- $z = 4 + 5i$ et $\bar{z} = 4 - 5i$
- On peut également noter :
$\overline{7 - 3i} = 7 + 3i$; $\bar{i} = -i$; $\bar{5} = 5$

<u>Propriétés :</u> Soit z et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

a) $\bar{\bar{z}} = z$
b) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
c) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
d) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ avec $z \neq 0$
f) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ avec $z' \neq 0$

<u>Démonstrations (dont c, d et e au programme) :</u>

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' réels.
a) $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

b) $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'}$
$= \overline{a + a' + i(b + b')}$
$= a + a' - i(b + b')$
$= a - ib + a' - ib'$
$= \overline{a + ib} + \overline{a' + ib'}$
$= \bar{z} + \overline{z'}$

c) $\overline{z \times z'} = \overline{(a + ib) \times (a' + ib')}$
$= \overline{aa' + iab' + iba' + i^2bb'}$
$= \overline{aa' - bb' + i(ab' + ba')}$
$= aa' - bb' - i(ab' + ba')$

$\bar{z} \times \overline{z'} = \left(\overline{a + ib}\right) \times \left(\overline{a' + ib'}\right)$
$= (a - ib) \times (a' - ib')$
$= aa' - iab' - iba' + i^2bb'$
$= aa' - bb' - i(ab' + ba')$

Donc : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

d) On procède par récurrence.
- <u>Initialisation pour $n = 2$ (trivial pour $n = 1$) :</u> $\overline{z^2} = \overline{z \times z} = \bar{z} \times \bar{z} = \bar{z}^2$, d'après la propriété c.
- <u>Hérédité :</u>
  - <u>Hypothèse de récurrence :</u>
  Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie : $\overline{z^k} = \bar{z}^k$.
  - <u>Démontrons que :</u> La propriété est vraie au rang $k + 1$: $\overline{z^{k+1}} = \bar{z}^{k+1}$.
  $\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z}$
  $= \overline{z^k} \times \bar{z}$, d'après la propriété c.
  $= \bar{z}^k \times \bar{z}$, par hypothèse de récurrence.
  $= \bar{z}^{k+1}$
- <u>Conclusion :</u>

La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul, soit : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i}$

$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$

Donc : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

f) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

Propriétés :
a) z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ b) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstrations :

$z = \bar{z}$	$z = -\bar{z}$
$\Leftrightarrow a + ib = a - ib$	$\Leftrightarrow a + ib = -a + ib$
$\Leftrightarrow 2ib = 0$	$\Leftrightarrow 2a = 0$
$\Leftrightarrow b = 0$	$\Leftrightarrow a = 0$

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration :
$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Méthode : Déterminer un conjugué

Vidéo https://youtu.be/WhKHo9YwafE

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = (2 - i)(i - 5) \qquad z_2 = \frac{3 + 2i}{i}$$

Correction

$\overline{z_1} = \overline{(2 - i)(i - 5)}$

$= \overline{(2 - i)} \times \overline{(i - 5)}$

$= (2 + i)(-i - 5)$

$= -2i - 10 - i^2 - 5i$

$\overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3 + 2i}{i}\right)}$

$= \frac{\overline{3 + 2i}}{\bar{i}}$

$= \frac{3 - 2i}{-i}$

$= \frac{(3 - 2i)i}{-i^2}$

$= -2i - 10 + 1 - 5i$ $\qquad$ $= \dfrac{(3-2i)i}{1}$

$= -9 - 7i$ $\qquad$ $= 2 + 3i$

Méthode : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Vidéo https://youtu.be/qu7zGL5y4vI

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $3z - 6 = 4i + z$ $\qquad$ b) $3z - 2 = \bar{z} + 1$

Correction

a) $3z - 6 = 4i + z$

$3z - z = 6 + 4i$

$2z = 6 + 4i$

$z = 3 + 2i$

b) On pose : $z = a + ib$. L'équation s'écrit alors :

$3(a + ib) - 2 = a - ib + 1$

$3a + 3ib - 2 - a + ib - 1 = 0$

$2a - 3 + 4ib = 0$

Donc : $2a - 3 = 0$ et $4b = 0$

Soit : $a = \dfrac{3}{2}$ et $b = 0$

D'où : $z = \dfrac{3}{2}$

Partie 3 : Formule du binôme de Newton

Théorème : Formule du binôme

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Remarque : Les coefficients $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

Démonstration au programme :

On procède par récurrence.

- Initialisation : Pour $n = 1$: $(a+b)^1 = a + b$ et $\binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a + b$
- Hérédité :

  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons qu'il existe un entier non nul k tel que la propriété soit vraie :

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k + 1$:

$$(a+b)^{k+1}$$
$$= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$
$$= (a+b)\left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right)$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k$$
$$+ \binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 + \dots$$
$$+ \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

Or, $\binom{k}{0} = 1$ et $\binom{k}{k} = 1$

Donc :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 + \dots$$
$$+ \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]ab^k + b^{k+1}$$

Et, d'après la formule de Pascal, on a :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^k + b^{k+1}$$
$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^k$$
$$+ \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Car $\binom{k+1}{0} = 1$ et $\binom{k+1}{k+1} = 1$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Méthode : Appliquer la formule du binôme

Vidéo https://youtu.be/UsYH9PvppPo

Développer l'expression $(z+5)^6$.

Correction

$(z+5)^6$
$$= \binom{6}{0}z^6 + \binom{6}{1}z^5 \times 5 + \binom{6}{2}z^4 \times 5^2 + \binom{6}{3}z^3 \times 5^3 + \binom{6}{4}z^2 \times 5^4 + \binom{6}{5}z \times 5^5 + \binom{6}{6}5^6$$

On construit un triangle de Pascal :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On lit les coefficients sur la dernière ligne du tableau.
$(z+5)^6 = 1z^6 + 6z^5 \times 5 + 15z^4 \times 5^2 + 20z^3 \times 5^3 + 15z^2 \times 5^4 + 6z \times 5^5 + 1 \times 5^6$

Soit : $(z+5)^6 = z^6 + 30z^5 + 375z^4 + 2\,500z^3 + 9\,375z^2 + 18\,750z + 15\,625$