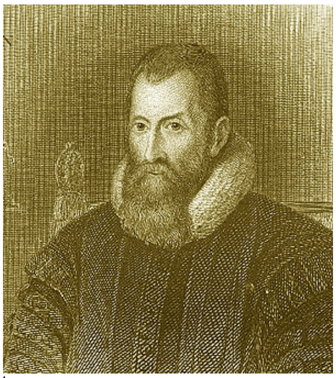
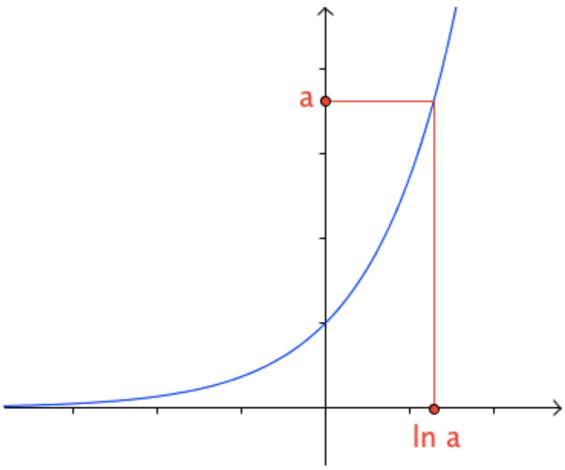
FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN



En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».
Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.
Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).
Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper.
Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.
Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.
L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (paragraphe II). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

I. Définition

Pour tout réel a de $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition : On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.
La **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction :

$$\ln :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

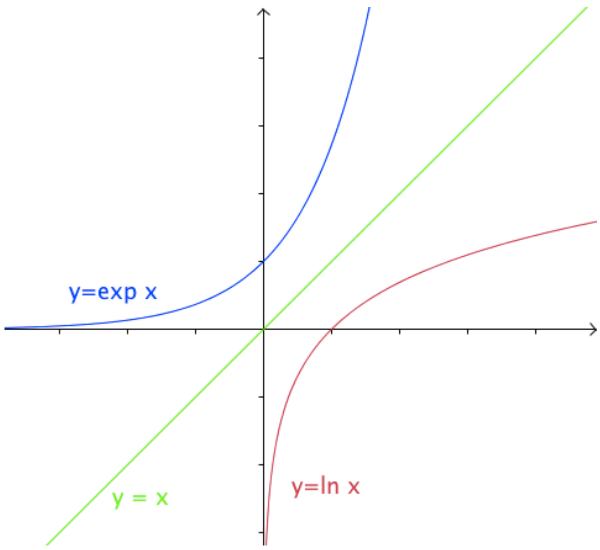
Remarques :

- Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log** est définie par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$



Conséquences :
a) Pour $x > 0$: $y = \ln x \iff x = e^y$
b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$
c) $\ln e^x = x$
d) Pour $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

II. Propriétés de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Démonstration :
$e^{\ln(a\times b)} = a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$
Donc : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Ainsi, celui qui aurait à effectuer 36 x 62, appliquerait cette formule, soit :
log(36 x 62) = log(36) + log(62) ≈ 1,5563 + 1,7924 (voir table ci-contre)

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :
log(36 x 62) ≈ 3,3487

En cherchant dans la table, le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : 36 x 62 = 2232.

x	*log(x)*
1	0
2	0,3010
3	0,4771
…	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
…	
62	1,7924
…	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
…	

2) Conséquences

Corollaires : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

a) $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

b) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

c) $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

d) $\ln a^n = n \ln a$ avec n entier relatif

e) $\ln a^x = x \ln a$ avec x réel

Méthode : Simplifier une expression contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/HGrK77-SCl4

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$ $\quad B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$ $\quad C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$

$$\begin{aligned} A &= \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5}) \\ &= \ln(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) \\ &= \ln(9-5) = \ln 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3 \\ &= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2 \\ &= \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2} = \ln \frac{40}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \ln e^2 - \ln \frac{2}{e} \\ &= 2\ln e - \ln 2 + \ln e \\ &= 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2 \end{aligned}$$

3) Équations et inéquations

Propriétés : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

a) $\ln a = \ln b \iff a = b$

b) $\ln a < \ln b \iff a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/lCT-8ijhZiE

Vidéo https://youtu.be/_fpPphstjYw

Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = 2,\ I =]0\,;+\infty[$ $\quad$ b) $e^{x+1} = 5,\ I = \mathbb{R}$

c) $3\ln x - 4 = 8,\ I =]0\,;+\infty[$ $\quad$ d) $\ln(6x-1) \geq 2,\ I = \left]\frac{1}{6}\,;+\infty\right[$

e) $e^x + 5 > 4\,e^x,\ I = \mathbb{R}$

a) $\ln x = 2$

$\ln x = \ln e^2$

$x = e^2$

b) $e^{x+1} = 5$

$e^{x+1} = e^{\ln 5}$

$x + 1 = \ln 5$

$x = \ln 5 - 1$

c) $3 \ln x - 4 = 8$

$3 \ln x = 12$

$\ln x = 4$

$\ln x = \ln e^4$

$x = e^4$

d) $\ln(6x - 1) \geq 2$

$\ln(6x - 1) \geq \ln e^2$

$6x - 1 \geq e^2$

$6x \geq e^2 + 1$

$x \geq \dfrac{e^2+1}{6}$

L'ensemble solution est donc $\left[\dfrac{e^2+1}{6}\ ;\ +\infty\right[$.

e) $e^x + 5 > 4\, e^x$

$e^x - 4\, e^x > -5$

$-3\, e^x > -5$

$e^x < \dfrac{5}{3}$

$e^x < e^{\ln\frac{5}{3}}$

$x < \ln \dfrac{5}{3}$

L'ensemble solution est donc $\left]-\infty\ ;\ \ln\frac{5}{3}\right[$.

III. Étude de la fonction logarithme népérien

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Exemple :

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

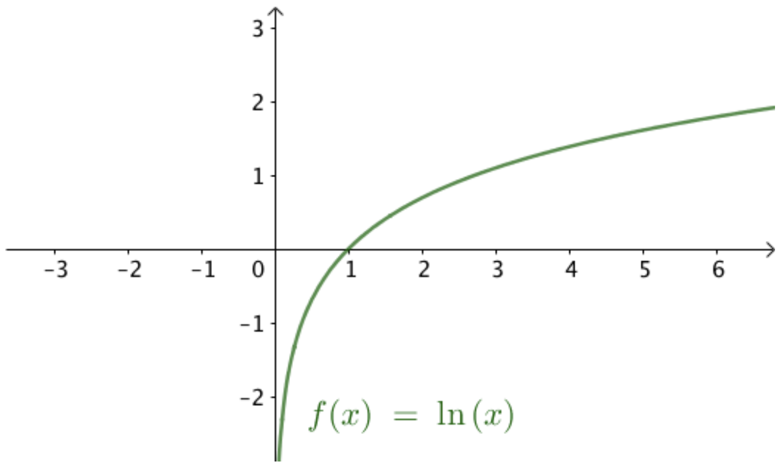
x	0		$+\infty$
$(\ln x)'$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Limites aux bornes

Propriétés : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

4) Courbe représentative

Valeurs particulières :
$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$



IV. Études de fonctions contenant des logarithmes

Méthode : Étudier les variations d'une fonction

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
$f(x) = 3 - x + 2\ln x$

Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$1+2\ln 2$	$\searrow$	

$f(2) = 3 - 2 + 2\ln 2 = 1 + 2\ln 2$

Méthode : Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation y = x

Vidéo https://youtu.be/0hQnOs_hcss

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.
On a également : $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

On en déduit que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$ soit $x > \ln x$.