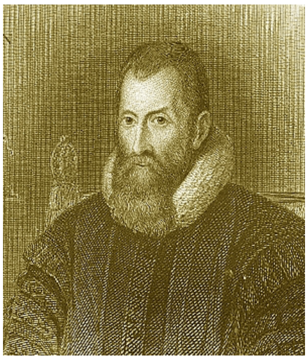
FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

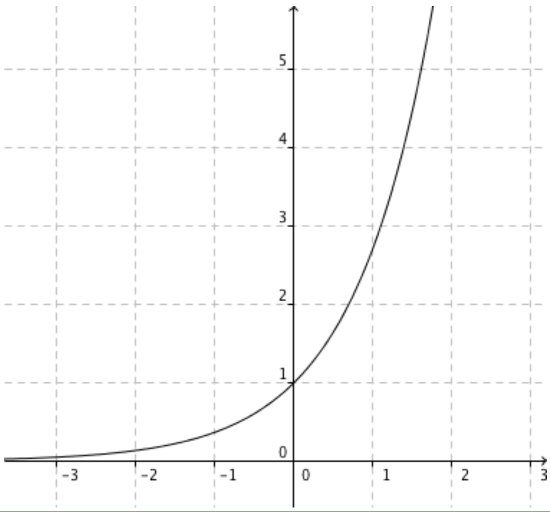


En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ». Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.
Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).
Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.
Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.
L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (Partie 2). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

Partie 1 : Fonction exponentielle et fonction logarithme

1) Rappels concernant la fonction exponentielle

Propriétés : La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable, strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.
On a : $(e^x)' = e^x$

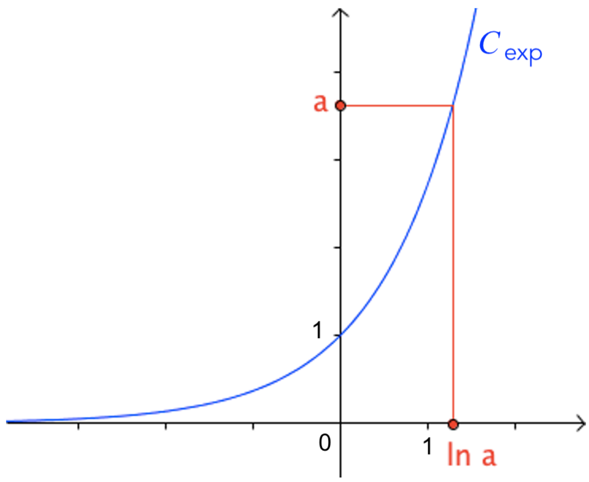


Propriétés :
- $e^0 = 1$ $\quad e^1 = e$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ $\quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

2) Définition de la fonction logarithme népérien

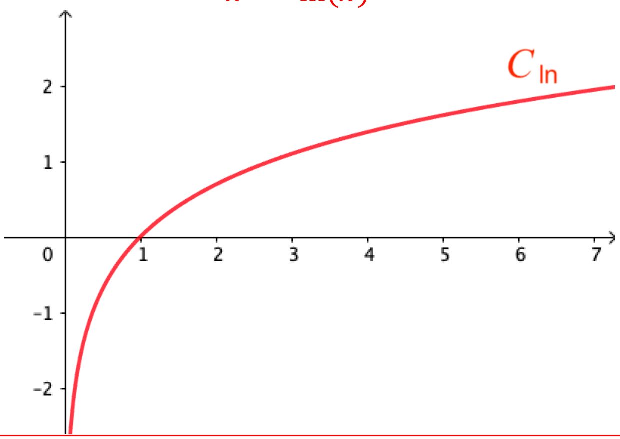
Pour tout réel a de $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Définitions : ● On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.



● La **fonction logarithme népérien**, notée $\mathbf{ln}$, est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, par

$$x \longmapsto \ln(x)$$



Remarques :

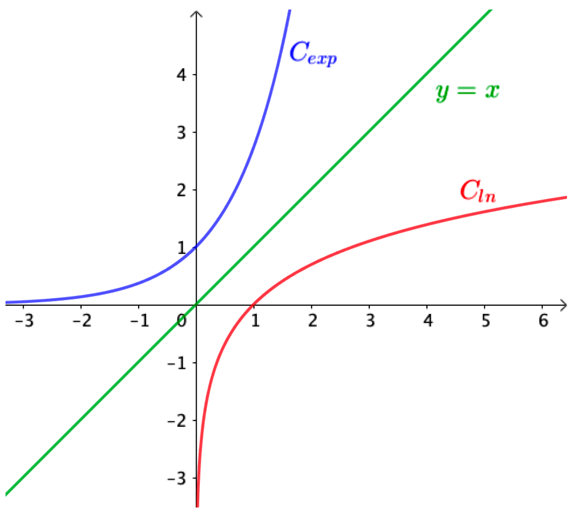
- Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre.

exp

1	2	0	$ln(2)$
e	e^2	1	2

ln

- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



A noter :
Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln 10}$ → *Voir chapitre « Logarithme » enseignement commun.*

Propriétés de **ln** liées à la fontion **exp** :
a) Pour $x > 0$: $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$
b) $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
c) $\ln(e^x) = x$
d) Pour $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$

Partie 2 : Propriétés de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

Démonstration :
$e^{\ln(x\times y)} = x \times y = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$
Donc : $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

Remarque : Voici comment Neper transformait un produit en somme :

Celui qui aurait, par exemple, à effectuer 36×62, appliquerait la formule précédente, soit :
$\log(36 \times 62) = \log(36) + \log(62)$
$\approx 1{,}5563 + 1{,}7924$ (à, l'aide de la table ci-contre)

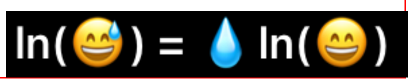
L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :
$log(36 \times 62) \approx 3{,}3487$

En cherchant à nouveau dans la table le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : $36 \times 62 = 2232$.

x	$log(x)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
…	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
…	
62	1,7924
…	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
…	

2) Conséquences

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
a) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
b) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
c) $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$
d) $\ln(x^n) = n\ln(x)$, avec n entier relatif



Méthode : Simplifier une expression contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/HGrK77-SCl4

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$ $\quad B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$ $\quad C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$

Correction

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$
$= \ln(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$
$= \ln(9-5) = \ln(4)$

$B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$
$= \ln(2^3) + \ln(5) - \ln(3^2)$
$= \ln\left(\frac{2^3 \times 5}{3^2}\right) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$

$C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$
$= 2\ln(e) - \ln(2) + \ln(e)$
$= 2 - \ln(2) + 1 = 3 - \ln(2)$

3) Équations et inéquations

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
a) $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$ b) $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/lCT-8ijhZiE
Vidéo https://youtu.be/_fpPphstjYw

Résoudre dans l'intervalle I les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln(x) = 2,\ I =]0\,;\,+\infty[$ b) $e^{x+1} = 5,\ I = \mathbb{R}$

c) $3\ln(x) - 4 = 8,\ I =]0\,;\,+\infty[$ d) $\ln(6x-1) \geq 2,\ I = \left]\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$

e) $e^x + 5 > 4\,e^x, I = \mathbb{R}$

Correction

a) On résout l'équation dans l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$, car la fonction *ln* est définie pour $x > 0$.

$\ln(x) = 2$
$\ln(x) = \ln(e^2)$
$x = e^2$

b) $e^{x+1} = 5$
$e^{x+1} = e^{\ln(5)}$
$x + 1 = \ln(5)$

$x = \ln(5) - 1$

c) $3\ln(x) - 4 = 8$

$3\ln(x) = 12$

$\ln(x) = 4$

$\ln(x) = \ln(e^4)$

$x = e^4$

d) On résout l'inéquation dans l'intervalle $I = \left]\frac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[$, car $6x - 1 > 0$. Soit $x > \frac{1}{6}$.

$\ln(6x - 1) \geq 2$

$\ln(6x - 1) \geq \ln(e^2)$

$6x - 1 \geq e^2$

$6x \geq e^2 + 1$

$x \geq \frac{e^2+1}{6}$

L'ensemble solution est donc $\left[\frac{e^2+1}{6}\ ;\ +\infty\right[$.

e) $e^x + 5 > 4\,e^x$

$e^x - 4\,e^x > -5$

$-3\,e^x > -5$

$e^x < \frac{5}{3}$

$e^x < e^{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

$x < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

L'ensemble solution est donc $\left]-\infty\ ;\ \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right[$.

Partie 3 : Étude de la fonction logarithme népérien

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Exemple :

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0$

3) Limites aux bornes

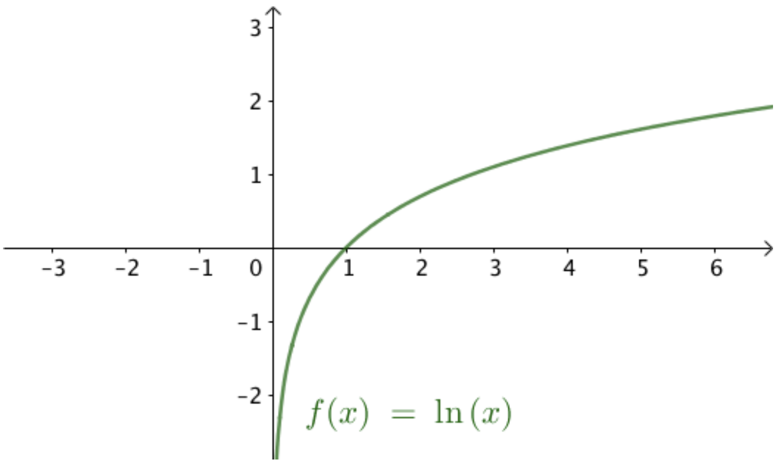
Propriétés : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0	$+\infty$
$(\ln(x))'$	‖	$+$
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

4) Courbe représentative

Valeurs particulières :
$\ln(1) = 0$
$\ln(e) = 1$



Partie 4 : Études de fonctions contenant des logarithmes

Méthode : Étudier les variations d'une fonction

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$

Correction
Sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	
$f(x)$	||	↗	$1+2\ln(2)$	↘	

$f(2) = 3 - 2 + 2\ln(2) = 1 + 2\ln(2)$

Méthode : Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$

Vidéo https://youtu.be/0hQnOs_hcss

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

Correction
On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.
On a également : $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	−	0	+	
$g(x)$	||	↘	1	↗	

On en déduit que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = x - \ln(x) \geq 1 > 0$ soit $x > \ln(x)$.
La droite d'équation $y = x$ est située au-dessus de la courbe de la fonction logarithme.