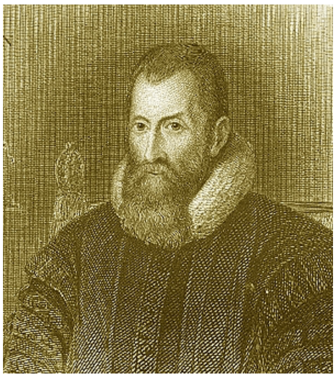
# FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

**Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/VJns0RfVWGg**



En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».
Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.
*Neper* construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).
Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.
Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.
L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (Partie 3). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

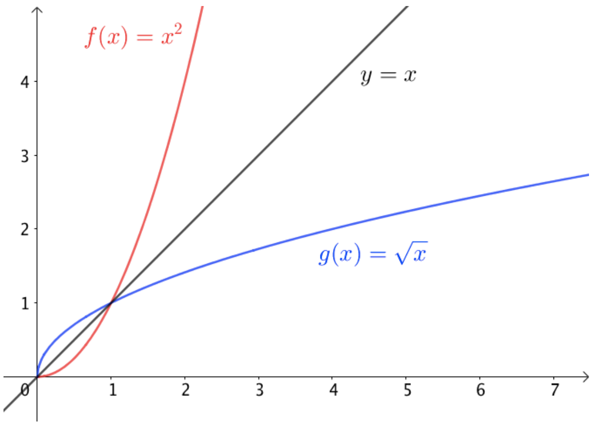
## Partie 1 : Fonction réciproque

Exemple :
Dire que 9 est l'image de 3 par la fonction carré, revient à dire que 3 est l'image de 9 par la fonction racine carrée.
On note : $3^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{9} = 3$.

On a également : $5^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{25} = 5$.

De façon générale, pour tout réel $a$ et $b$ positifs, on a : $a^2 = b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{b} = a$.

Dans ce cas, on dit que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est réciproque de la fonction $x \longmapsto x^2$ pour des valeurs de $x$ positives.
On dit également que les fonctions carré et racine carrée sont réciproques l'une de l'autre pour des valeurs de $x$ positives.



Les courbes représentatives des fonctions carré et racine carrée sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ pour des valeurs de $x$ positives.

Définition : Soit une fonction $f$ continue et strictement monotone sur un intervalle.
On appelle **fonction réciproque** de $f$, la fonction $g$ telle que : $f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$.

Propriété : Les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Méthode : Déterminer la fonction réciproque d'une fonction

**Vidéo** https://youtu.be/bgINubYekqo

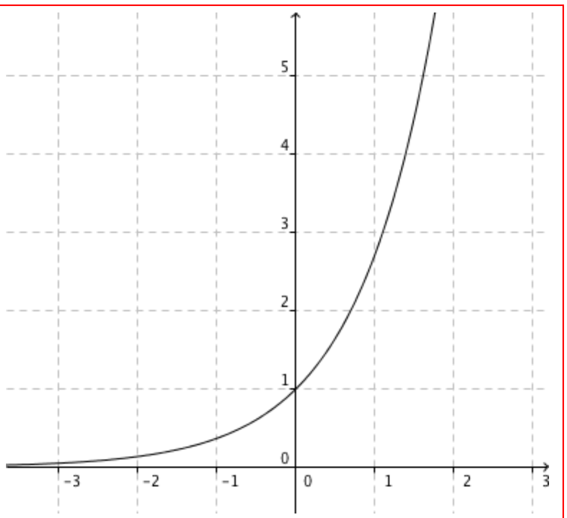
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$.
Déterminer la fonction réciproque de la fonction $f$.

**Correction**
On pose : $f(a) = b$
Soit : $3a - 4 = b$
$3a = b + 4$
$a = \frac{1}{3}b + \frac{4}{3}$
$\frac{1}{3}b + \frac{4}{3} = a$
Soit encore : $g(b) = a$ avec : $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$
$g$ est la fonction réciproque de la fonction $f$.

## Partie 2 : Fonction exponentielle et fonction logarithme

### 1) Rappels concernant la fonction exponentielle

Propriétés : La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable, strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.
On a : $(e^x)' = e^x$

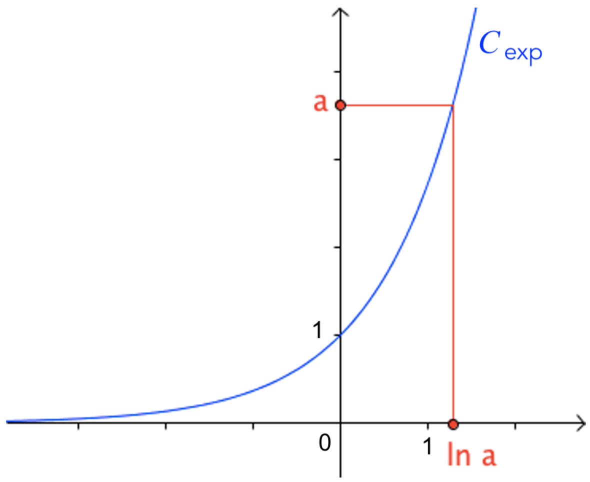


<u>Propriétés :</u>
- $e^0 = 1$ $\quad$ $e^1 = e$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\quad$ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad$ $(e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ $\quad$ $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

## 2) Définition de la fonction logarithme népérien

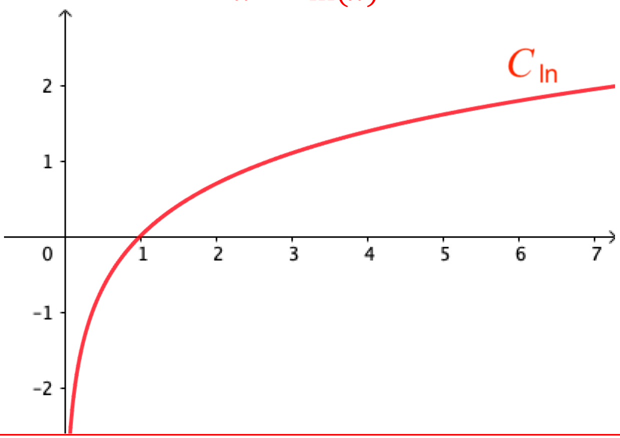
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a$ de $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

<u>Définitions :</u> • On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif $a$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.




• La **fonction logarithme népérien**, notée $\mathbf{ln}$, est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$, par

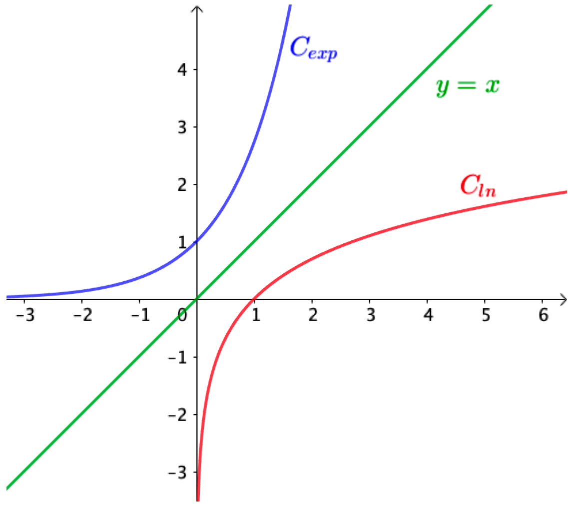
$$x \longmapsto \ln(x)$$




<u>Remarques :</u>
- Les fonctions $exp$ et $ln$ sont réciproques l'une de l'autre.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $exp$ | 1 | 2 | 0 | $ln(2)$ | $ln$ |
| | $e$ | $e^2$ | 1 | 2 | |

- Les courbes représentatives des fonctions $exp$ et $ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.




A noter :
Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln 10}$

Propriétés de **ln** liées à la fontion **exp** :
a) Pour $x > 0$ : $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$
b) $\ln(1) = 0$ ; $\ln(e) = 1$ ; $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
c) $\ln(e^x) = x$
d) Pour $x > 0$ : $e^{\ln(x)} = x$

Démonstrations :
a) Par définition
b) - $e^0 = 1$ donc d'après a, on a : $\ln(1) = 0$
- $e^1 = e$ donc d'après a, on a : $\ln(e) = 1$
- $e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc d'après a, on a : $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
c) Si on pose $y = e^x$, d'après a, on a : $x = \ln(y) = \ln(e^x)$
d) Si on pose $y = \ln(x)$, d'après a, on a : $x = e^y = e^{\ln(x)}$

# Partie 3 : Propriétés de la fonction logarithme népérien

## 1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels $x$ et $y$ strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

Démonstration :
$e^{\ln(x \times y)} = x \times y = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$
Donc : $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

Remarque : Voici comment Neper transformait un produit en somme :

Celui qui aurait, par exemple, à effectuer $36 \times 62$, appliquerait la formule précédente, soit :
$\log(36 \times 62) = \log(36) + \log(62)$
$\approx 1{,}556\,3 + 1{,}792\,4$ (à, l'aide de la table ci-contre)

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :
$log(36 \times 62) \approx 3{,}348\,7$

En cherchant à nouveau dans la table le logarithme égal à 3,348 7, on trouve 2 232, soit : $36 \times 62 = 2\,232$.

| $x$ | $log(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,3010 |
| 3 | 0,4771 |
| … | |
| 34 | 1,5315 |
| 35 | 1,5441 |
| 36 | 1,5563 |
| … | |
| 62 | 1,7924 |
| … | |
| 2231 | 3,3485 |
| 2232 | 3,3487 |
| 2233 | 3,3489 |
| … | |

## 2) Conséquences

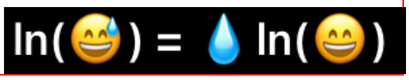
Corollaires : Pour tous réels $x$ et $y$ strictement positifs, on a :

a) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

b) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

c) $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

d) $\ln(x^n) = n\ln(x)$, avec $n$ entier relatif




Démonstrations :

a) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x} \times x\right) = \ln(1) = 0$ donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

b) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

c) $2\ln(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln(x)$ donc $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

d) On démontre ce résultat par récurrence le cas où $n$ est un entier naturel.
L'initialisation est triviale.
La démonstration de l'hérédité passe par la décomposition :

$$\ln(x^{k+1}) = \ln(x^k \times x) = \ln(x^k) + \ln(x) = k\ln(x) + \ln(x) = (k+1)\ln(x)$$

Méthode : Simplifier une expression contenant des logarithmes

**Vidéo** https://youtu.be/HGrK77-SCl4

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$ $\qquad B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$ $\qquad C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$

**Correction**

$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$ $\qquad B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$

$= \ln\left((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\right)$

$= \ln(9-5) = \ln(4)$

$= \ln(2^3) + \ln(5) - \ln(3^2)$

$= \ln\left(\frac{2^3 \times 5}{3^2}\right) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$

$C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$

$= 2 - \ln(2) + \ln(e)$

$= 2 - \ln(2) + 1 = 3 - \ln(2)$

3) Équations et inéquations

Propriétés : Pour tous réels $x$ et $y$ strictement positifs, on a :
a) $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$ b) $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$

Méthode : Résoudre une équation avec des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/ICT-8ijhZiE

a) Résoudre l'équation $e^{x+1} = 5$.
b) Résoudre l'équation $\ln(x) = 2$ dans l'intervalle $I = ]0\,;\, +\infty[$.
c) Résoudre l'équation $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$ dans l'intervalle $I = ]3\,;9[$.
d) Résoudre l'équation $\ln x = \ln(3x+1)$ dans l'intervalle $I = ]0\,;\, +\infty[$.

**Correction**

a) $e^{x+1} = 5$

$e^{x+1} = e^{\ln(5)}$

$x + 1 = \ln(5)$

$x = \ln(5) - 1$

b) On résout l'équation dans l'intervalle $I = ]0\,;\, +\infty[$, car la fonction *ln* est définie pour $x > 0$.

$\ln(x) = 2$

$\ln(x) = \ln(e^2)$

$x = e^2$

La solution est donc $e^2$ car elle appartient à l'intervalle $I = ]0\,;\, +\infty[$.

c) On résout l'équation dans l'intervalle $I = ]3\,;\, 9[$, car $x - 3 > 0$ et $9 - x > 0$.
Soit $x > 3$ et $x < 9$.

$\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$

$\ln\left((x-3)(9-x)\right) = 0$

$\ln\left((x-3)(9-x)\right) = \ln 1$

$(x-3)(9-x) = 1$

$-x^2 + 12x - 27 = 1$

$-x^2 + 12x - 28 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ car elles appartiennent à l'intervalle $I = ]3\,;9[$.

d) On résout l'équation dans l'intervalle $I = ]0\,;\,+\infty[$, car $x > 0$ et $3x + 1 > 0$. Soit $x > 0$.

$\ln x = \ln(3x + 1)$
$x = 3x + 1$
$2x = -1$
$x = -\frac{1}{2}$

Ce qui est impossible car l'équation est définie sur $I = ]0\,;\,+\infty[$.
L'équation n'a pas de solution.

Méthode : Résoudre une inéquation avec des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/_fpPphstjYw

a) Résoudre l'inéquation $e^x + 5 > 4\,e^x$.

b) Résoudre l'inéquation $\ln(6x - 1) \geq 2$ sur l'intervalle $I = \left]\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$.

**Correction**

a) $e^x + 5 > 4\,e^x$
$e^x - 4\,e^x > -5$
$-3\,e^x > -5$
$e^x < \frac{5}{3}$
$e^x < e^{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$
$x < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left]-\infty\,;\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right[$.

b) On résout l'inéquation dans l'intervalle $I = \left]\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$, car $6x - 1 > 0$. Soit $x > \frac{1}{6}$.
$\ln(6x - 1) \geq 2$
$\ln(6x - 1) \geq \ln(e^2)$
$6x - 1 \geq e^2$
$6x \geq e^2 + 1$
$x \geq \frac{e^2+1}{6}$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left[\frac{e^2+1}{6}\,;\,+\infty\right[$ car il est inclus dans $I = \left]\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$.

Méthode : Déterminer un seuil pour une suite géométrique

**Vidéo** https://youtu.be/fm1YBGcix0E

On considère la suite la suite $(u_n)$ définie par $u_n = 5 \times 2^n$.
Déterminer le rang $n$ à partir duquel $u_n \geq 10^6$.

**Correction**
La suite $(u_n)$ est une suite géométrique croissante. On cherche donc le plus petit entier $n$ tel que $5 \times 2^n \geq 10^6$.

Soit : $2^n \geq 200\,000$

$$\ln(2^n) \geq \ln 200\,000$$
$$n \ln(2) \geq \ln(200\,000)$$
$$n \geq \frac{\ln(200\,000)}{\ln(2)}$$

Or, $\dfrac{\ln(200\,000)}{\ln(2)} \approx 17{,}6$

A partir du rang $n = 18$, on a $u_n \geq 10^6$.

# Partie 4 : Étude de la fonction logarithme népérien

**Vidéo** https://youtu.be/3KLX-ScJmcI

## 1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Cas de la fonction composée $\ln u(x)$:

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $\ln(u)$ | $\frac{u'}{u}$ |

Méthode : Dériver des fonctions contenant des logarithmes népériens

**Vidéo** https://youtu.be/-zrhBc9xdRs

a) Dériver la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
b) Dériver la fonction $g$ définie sur $]0\,;2[$par $g(x) = \ln(2x - x^2)$.

**Correction**

$a)\ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$

$= \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

$b)\ u(x) = 2x - x^2 \quad \rightarrow \quad u'(x) = 2 - 2x$

$g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2 - 2x}{2x - x^2}$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x} > 0$

3) Limites aux bornes

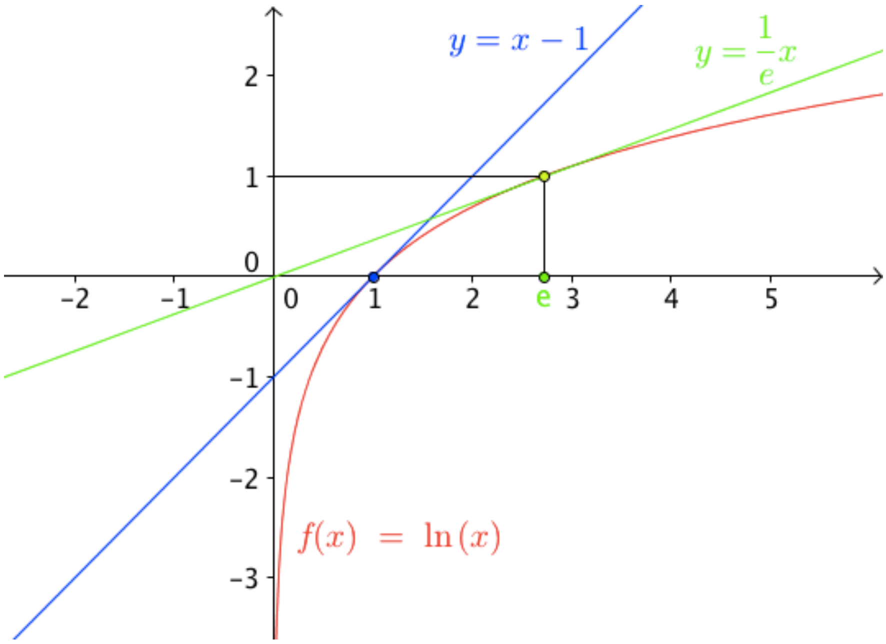
Propriétés : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $(\ln(x))'$ | ‖ | $+$ |
| $\ln(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

6) Courbe représentative

Valeurs particulières : $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$



Méthode : Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y

Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,e[$ par
$f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$.

**Correction**

- Variations :

Sur $]0\,;\,e[$, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;\,e[$.

- Limite en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} 2\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} 3 - x = 3$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

- On dresse ainsi le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $1 + 2\ln(2)$ | $\searrow$ | $5 - e$ |

$f(2) = 3 - 2 + 2\ln(2) = 1 + 2\ln(2)$
$f(e) = 3 - e + 2\ln(e) = 5 - e$.