FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN (Partie 2)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/VJns0RfVWGg

I. Étude de la fonction logarithme népérien

1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/wmysrEq4XIg

Rappel : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

En posant : $u(x) = \ln x$, on a : $\left(e^{\ln x}\right)' = (\ln x)' e^{\ln x}$

Or $\left(e^{\ln x}\right)' = (x)' = 1$.

Donc : $(\ln x)' e^{\ln x} = 1$

Soit : $(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{\ln x}}$

Soit encore : $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/yiQ4Z5FdFQ8

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$: $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} \\
&= \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} \\
&= \ln x \frac{2 - \ln x}{x^2}
\end{aligned}
$$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$

3) Convexité

Propriété : La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et donc la fonction logarithme népérien est concave sur cet intervalle.

4) Limites aux bornes

Propriétés : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$(\ln x)'$	||	+	
$\ln x$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Tangentes particulières

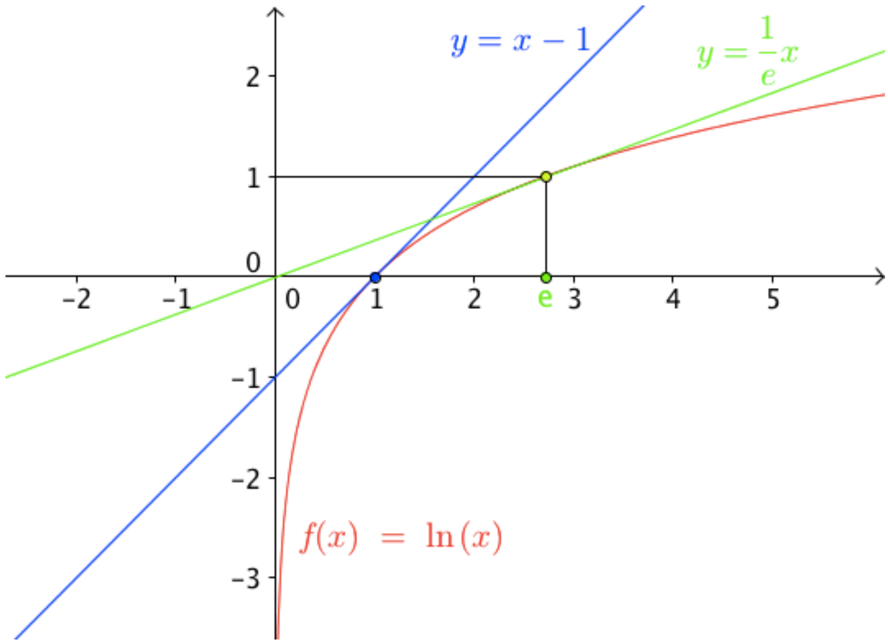
Rappel : Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Dans le cas de la fonction logarithme népérien, l'équation est de la forme :
$y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln a$.

- Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{1}(x-1) + \ln 1$ soit :
$y = x - 1$.
- Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{e}(x-e) + \ln e$ soit :
$y = \frac{1}{e}x$.

6) Courbe représentative

Valeurs particulières :
$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$



II. Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ et pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$

Démonstration du b. dans les cas où $n = 1$ (au programme) :

Vidéo https://youtu.be/LxqQBYTaRaw

En posant $X = \ln x$, on a : $x = e^X$
Or, si x tend vers 0, alors $X = \ln x$ tend vers $-\infty$.
Donc : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X \times X = 0$ par croissance comparée de la fonction exponentielle et des fonctions puissances.

Remarque : Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Méthode : Déterminer une limite par croissance comparée

Vidéo https://youtu.be/lA3W_j4p-c8
Vidéo https://youtu.be/OYcsChr8src

$a)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x$ $\qquad$ $b)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x - 1}$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "$\infty - \infty$".
Levons l'indétermination :
$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc : $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$.
Et donc $\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ comme limite d'un produit.
Soit : $\lim_{x\to+\infty} x - \ln x = +\infty$.

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Soit : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$.

III. Études de fonctions

1) Cas de fonctions contenant la fonction $\ln x$

Méthode : Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y

1) Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
$f(x) = 3 - x + 2\ln x$
2) Étudier la convexité de la fonction f.

1) Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$1 + 2\ln 2$	↘	

$f(2) = 3 - 2 + 2\ln 2 = 1 + 2\ln 2$

2) Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{-1 \times x - (2 - x) \times 1}{x^2} = \frac{-x - 2 + x}{x^2} = \frac{-2}{x^2} < 0$$

La fonction f' est donc décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. On en déduit que la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Méthode : Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation y = x

Vidéo https://youtu.be/0hQnOs_hcss

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.
On a également : $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

On en déduit que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$ soit $x > \ln x$.
La fonction logarithme est située en dessous de la droite d'équation $y = x$.

2) Cas de fonctions contenant la fonction composée $\ln u(x)$

Fonction	Dérivée
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$

Démonstration :
On pose : $v(x) = \ln x$, donc :

$$v'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Donc :
$(\ln u(x))' = (v(u(x)))'$

$= v'(u(x)) \times u'(x)$, selon la dérivée d'une fonction composée

$= \dfrac{1}{u(x)} \times u'(x)$

$= \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Méthode : Dériver des fonctions du type $\ln u$

Vidéo https://youtu.be/-zrhBc9xdRs

Dériver la fonction g définie sur $]0\,;2[$ par $g(x) = \ln(2x - x^2)$.

On pose : $u(x) = 2x - x^2 \quad \rightarrow \quad u'(x) = 2 - 2x$

$g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2-2x}{2x-x^2}$

Méthode : Étudier une fonction du type $\ln u$

Vidéo https://youtu.be/s9vyHsZoV-4
Vidéo https://youtu.be/3el4-JRKYVo
Vidéo https://youtu.be/CyOC-E7MnUw

On considère la fonction f définie sur $]-2\,;1[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$$

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations d'asymptotes à la courbe.
b) Déterminer le sens de variation de la fonction f.
c) Tracer sa courbe représentative de f.

$a)$ Par composition de limites, on a :

$-\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \dfrac{x+2}{1-x} = 0 \quad donc \quad \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty$

$-\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{x+2}{1-x} = +\infty \quad donc \quad \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$

La courbe de fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations :
$x = -2$ et $x = 1$.

$b)\ \ u'(x) = \dfrac{1\times(1-x)-(x+2)\times(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \dfrac{3}{(1-x)^2}$

Donc :

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{\frac{3}{(1-x)^2}}{u(x)}$

La fonction u est strictement positive sur $]-2\,;1[$ et $\frac{3}{(1-x)^2} > 0$.

Donc $f'(x) > 0$.
Et donc la fonction f est strictement croissante sur $]-2\,;1[$.

x	-2		1
$f'(x)$	‖	+	‖
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖

$c)$