FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

– Chapitre 2/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/VJns0RfVWGg

Partie 1 : Étude de la fonction logarithme népérien

1) Continuité et dérivabilité

Vidéo https://youtu.be/3KLX-ScJmcI

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/wmysrEq4XIg

Rappel : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

En posant : $u(x) = \ln(x)$, on a : $\left(e^{\ln(x)}\right)' = (\ln(x))'e^{\ln(x)}$

Or $\left(e^{\ln(x)}\right)' = (x)' = 1$.

Donc : $(\ln(x))'e^{\ln(x)} = 1$

Soit : $(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$.

Méthode : Calculer une dérivée contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/yiQ4Z5FdFQ8

Dériver la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$

Correction

$f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$

Avec : $u(x) = (\ln(x))^2 \quad \rightarrow \quad u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$

$v(x) = x \quad \rightarrow \quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \times x - (\ln(x))^2 \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{2\ln(x) - (\ln(x))^2}{x^2}$$

$$= \frac{\ln(x) \times (2 - \ln(x))}{x^2}$$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0$

3) Convexité

Propriété : La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

$(\ln(x))'' = -\frac{1}{x^2} < 0$

Donc la fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

4) Limites aux bornes

Propriétés : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$(\ln(x))'$	||	$+$	
$\ln(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Tangentes en 1 et en e

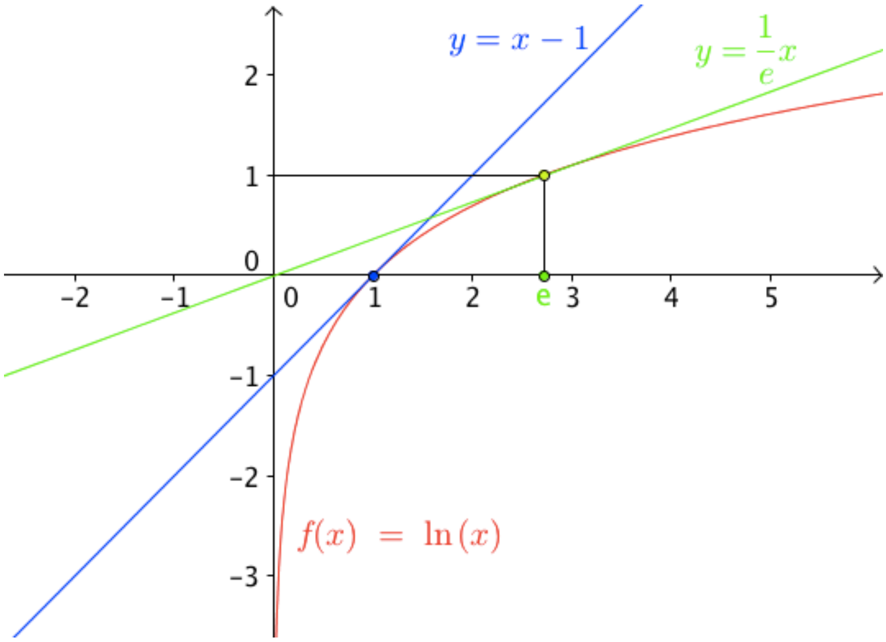
Rappel : Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est de la forme :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Dans le cas de la fonction logarithme népérien, l'équation est de la forme :
$y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln(a)$.

● Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{1}(x-1) + \ln(1)$ soit :
$y = x - 1$.

● Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{e}(x-e) + \ln(e)$ soit :
$y = \frac{1}{e}x$.

6) Courbe représentative

Valeurs particulières : $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$



Partie 2 : Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$

Démonstration du b. dans les cas où $n = 1$ (au programme) :

Vidéo https://youtu.be/LxgQBYTaRaw

En posant $X = \ln(x)$, on a : $x = e^X$

Or, si x tend vers 0, alors $X = \ln(x)$ tend vers $-\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X \times X = 0$ par croissance comparée de la fonction exponentielle et des fonctions puissances.

Remarque : Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Méthode : Déterminer une limite par croissance comparée

Vidéo https://youtu.be/lA3W_j4p-c8

Vidéo https://youtu.be/OYcsChr8src

$a)\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x)$ $\quad b)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$ $\quad c)\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{(x^2+1)\ln(x)}$

Correction

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ".
Levons l'indétermination :

$$x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$,
Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$.
Et donc, comme limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$
Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x) = +\infty$.

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \text{par croissance comparée.} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1} = 0$.

$$c)\ \frac{1}{(x^2+1)\ln(x)} = \frac{1}{x^2\ln(x) + \ln(x)}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x^2\ln(x) = 0\text{, par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

Donc, comme limite d'une somme : $\lim\limits_{x \to 0} x^2\ln(x) + \ln(x) = -\infty$

Et donc, comme limite d'un quotient (inverse) : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2\ln(x)+\ln(x)} = 0$

Soit : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{(x^2+1)\ln(x)} = 0$

Partie 3 : Études de fonctions

1) Cas de fonctions contenant la fonction $x \longmapsto \ln(x)$

Méthode : Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y

a) Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
$f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$
b) Étudier la convexité de la fonction f.

Correction
a) $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2-x}{x}$
Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La dérivée f' est donc positive sur $]0\,;2]$ et négative sur $[2\,;\,+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$1+2\ln(2)$	$\searrow$	

$f(2) = 3 - 2 + 2\ln(2) = 1 + 2\ln(2)$

b) $f''(x) = \dfrac{-1 \times x - (2-x) \times 1}{x^2} = \dfrac{-x-2+x}{x^2} = \dfrac{-2}{x^2} < 0$

On en déduit que la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Méthode : Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$

Vidéo https://youtu.be/0hQnOs_hcss

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

Correction
On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.
La dérivée g' est donc négative sur $]0\,;1]$ et positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	1	↗	

$g(1) = 1 - \ln(1) = 1$

On en déduit que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = x - \ln(x) \geq 1 > 0$ soit $x > \ln(x)$.
La fonction logarithme est située en dessous de la droite d'équation $y = x$.

2) Cas de fonctions contenant la fonction composée $x \mapsto \ln(u(x))$

Fonction	Dérivée
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$

Démonstration :
On pose : $v(x) = \ln(x)$, donc :

$$v'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(\ln(u(x)))' &= (v(u(x)))' \\ &= v'\big(u(x)\big) \times u'(x), \text{ selon la dérivée d'une fonction composée.} \\ &= \frac{1}{u(x)} \times u'(x) \\ &= \frac{u'(x)}{u(x)}\end{aligned}$$

Méthode : Dériver des fonctions du type $\ln(u)$

Vidéo https://youtu.be/-zrhBc9xdRs

Dériver la fonction f définie sur $]0\,;2[$ par $f(x) = \ln(2x - x^2)$.

Correction
$f(x) = \ln(2x - x^2) = \ln(u(x))$

Avec : $u(x) = 2x - x^2 \quad \rightarrow \quad u'(x) = 2 - 2x$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$$

Méthode : Étudier une fonction du type $\ln(u)$

Vidéo https://youtu.be/s9vyHsZoV-4
Vidéo https://youtu.be/3eI4-JRKYVo
Vidéo https://youtu.be/CyOC-E7MnUw

On considère la fonction f définie sur $]-2\,;1[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{1 - x}\right)$$

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe.
b) Déterminer le sens de variations de la fonction f.
c) Tracer la courbe représentative de f.

Correction

a) • $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2} x + 2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2} 1 - x = 3 \end{cases}$$

Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x+2}{1-x} = 0$

Et donc, comme limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x \to -2} \ln\left(\frac{x + 2}{1 - x}\right) = -\infty$$

En effet, si $x \to -2$, on a : $X = \frac{x+2}{1-x} \to 0$ et donc : $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} x + 2 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1} 1 - x = 0^+, \text{car } x < 1 \end{cases}$$

Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+2}{1-x} = +\infty$

Et donc, comme limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x \to 1} \ln\left(\frac{x + 2}{1 - x}\right) = +\infty$$

En effet, si $x \to 1$, on a : $X = \frac{x+2}{1-x} \to +\infty$ et donc : $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$.

La courbe de fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations :
$x = -2$ et $x = 1$.

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = \frac{x+2}{1-x}$

$$\rightarrow \quad u'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{u(x)}$$

La fonction u est strictement positive sur $]-2\,;1[$ et $\frac{3}{(1-x)^2} > 0$.

Donc $f'(x) > 0$.

On présente le sens de variations de f dans le tableau :

x	-2		1
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖

c)