FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

– Chapitre 2/2

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/VJns0RfVWGg**](https://youtu.be/VJns0RfVWGg)

**Partie 1 : Étude de la fonction logarithme népérien**

 1) Continuité et dérivabilité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/3KLX-ScJmcI**](https://youtu.be/3KLX-ScJmcI)

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur .

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur et .

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wmysrEq4XIg**](https://youtu.be/wmysrEq4XIg)

Rappel :

En posant : , on a :

Or .

Donc :

Soit : .

Méthode : Calculer une dérivée contenant des logarithmes

 **Vidéo** [**https://youtu.be/yiQ4Z5FdFQ8**](https://youtu.be/yiQ4Z5FdFQ8)

Dériver la fonction définie sur par :

**Correction**

Avec :

 2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur .

Démonstration :

Pour tout réel ,

 3) Convexité

Propriété : La fonction logarithme népérien est concave sur .

Démonstration :

Pour tout réel , .

Donc la fonction logarithme népérien est concave sur .

 4) Limites aux bornes

Propriétés : et

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  0  |
|  |   |
|  |    |

 5) Tangentes en 1 et en

Rappel : Une équation de la tangente à la courbe de au point d'abscisse est de la forme :

.

Dans le cas de la fonction logarithme népérien, l'équation est de la forme :

● Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est soit :

.

● Au point d'abscisse , l'équation de la tangente est soit :

.

6) Courbe représentative

Valeurs particulières : ,



**Partie 2 : Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances**

Propriétés (croissances comparées) :

a) et pour tout entier naturel non nul ,

b) et pour tout entier naturel non nul ,

Démonstration du b. dans les cas où (au programme) :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/LxgQBYTaRaw**](https://youtu.be/LxgQBYTaRaw)

En posant , on a :

Or, si tend vers 0, alors tend vers .

Donc : par croissance comparée de la fonction exponentielle et des fonctions puissances.

Remarque : Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Méthode : Déterminer une limite par croissance comparée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/lA3W\_j4p-c8**](https://youtu.be/lA3W_j4p-c8)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OYcsChr8src**](https://youtu.be/OYcsChr8src)

**Correction**

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "".

Levons l'indétermination :

Par croissance comparée : ,

Donc : .

Et donc, comme limite d’un produit :

Soit : .

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "".

Levons l'indétermination :

Donc, comme limite d’un quotient :

Soit : .

Donc, comme limite d’une somme :

Et donc, comme limite d’un quotient (inverse) :

Soit :

**Partie 3 : Études de fonctions**

 1) Cas de fonctions contenant la fonction

Méthode : Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y**](https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y)

a) Déterminer les variations de la fonction définie sur par

b) Étudier la convexité de la fonction .

**Correction**

Comme , est du signe de .

La dérivée est donc positive sur et négative sur .

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  0 2  |
|  |  0  |
|  |    |

On en déduit que la fonction est concave sur .

Méthode : Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d’équation

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0hQnOs\_hcss**](https://youtu.be/0hQnOs_hcss)

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d’équation .

**Correction**

On considère la fonction définie sur par .

Comme , est du signe de .

La dérivée est donc négative sur et positive sur .

On dresse ainsi le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  0 1  |
|  |  0  |
|  |   1 |

On en déduit que pour tout de , on a soit .

La fonction logarithme est située en dessous de la droite d’équation .

 2) Cas de fonctions contenant la fonction composée

|  |  |
| --- | --- |
| Fonction | Dérivée |
|  |  |

Démonstration :

On pose : , donc :

Donc :

, selon la dérivée d’une fonction composée.

Méthode : Dériver des fonctions du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-zrhBc9xdRs**](https://youtu.be/-zrhBc9xdRs)

Dériver la fonction définie sur par .

**Correction**

Avec :

Méthode : Étudier une fonction du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/s9vyHsZoV-4**](https://youtu.be/s9vyHsZoV-4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/3eI4-JRKYVo**](https://youtu.be/3eI4-JRKYVo)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/CyOC-E7MnUw**](https://youtu.be/CyOC-E7MnUw)

On considère la fonction définie sur par :

a) Calculer les limites de aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe.

b) Déterminer le sens de variations de la fonction

c) Tracer la courbe représentative de .

**Correction**

a) ● ?

Donc, comme limite d’un quotient :

Et donc, comme limite d’une fonction composée :

En effet, si , on a : et donc : .

● ?

Donc, comme limite d’un quotient :

Et donc, comme limite d’une fonction composée :

En effet, si , on a : et donc : .

La courbe de fonction admet deux asymptotes verticales d’équations :

 et

b) , avec

Donc :

La fonction est strictement positive sur et

Donc

On présente le sens de variations de dans le tableau :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  -2 1 |
|  |  |
|  |   |

c)



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)