LIMITES DES FONCTIONS (Partie 1)

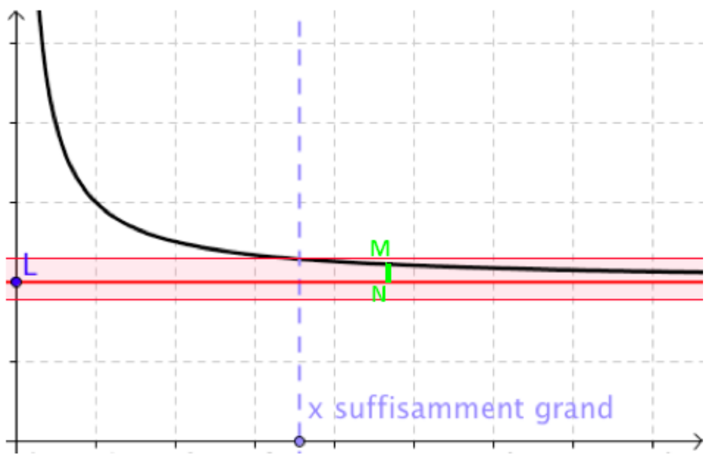
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/YPwJyYDsmxM

I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :
La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.



Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

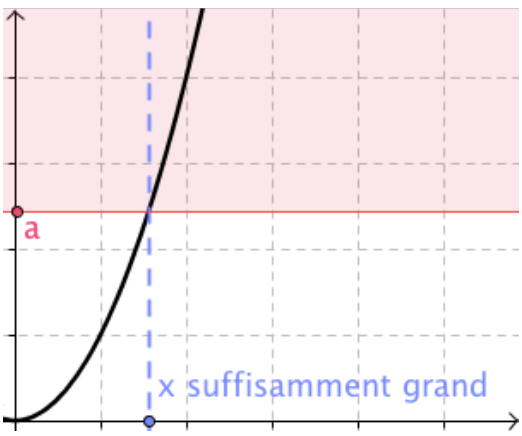
Définitions : - La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Remarque :
Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.
La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infini

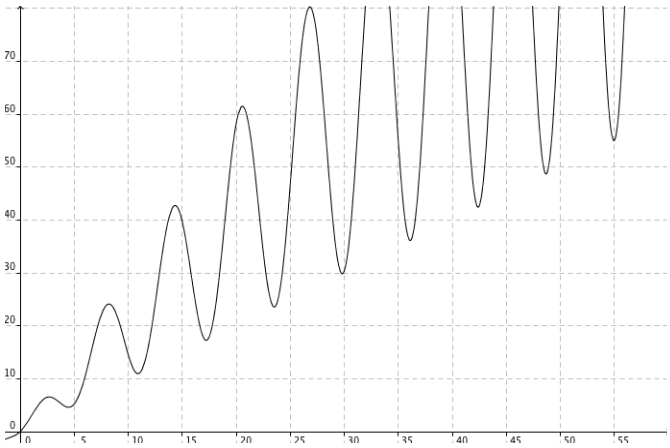
Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :
La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

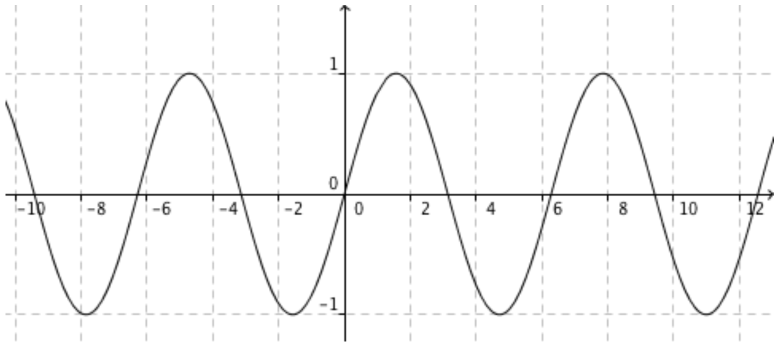


Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarques :
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



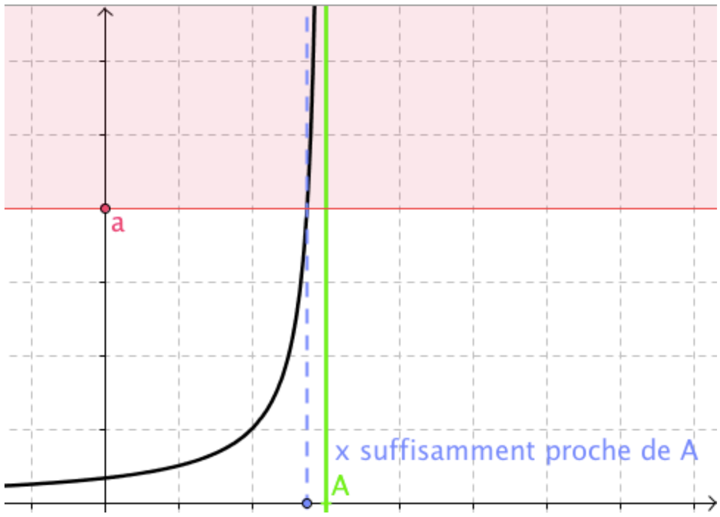
3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :
- $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

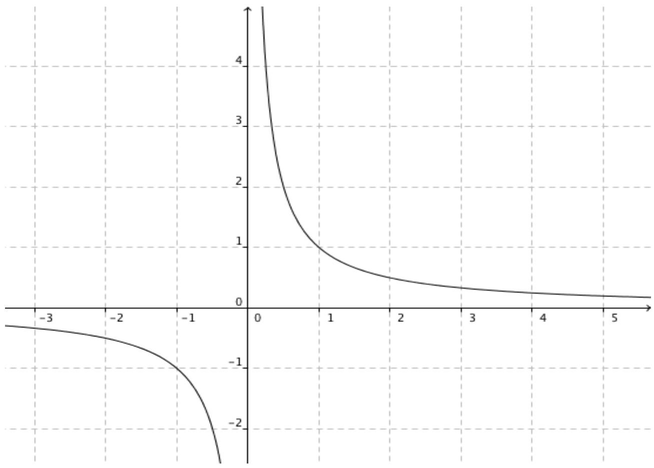
<u>Exemple :</u>
La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de A.



<u>Définitions :</u> - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$.
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

<u>Définition :</u> La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f, si : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

<u>Remarque :</u>
Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.
Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.
- Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.



On parle de **limite à gauche de 0** et de **limite à droite de 0**.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :
Vidéo https://youtu.be/9nEJCL3s2eU

III. Opérations sur les limites

Vidéo https://youtu.be/at6pFx-Umfs

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$?

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+x^2) = +\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2) = -\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1-2x}{x-3}$?

$\lim\limits_{x\to 3} 1-2x = -5$

$\lim\limits_{x\to 3^-} x-3 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3 = 0^+$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1-2x}{x-3} = -\infty$

Remarque :
Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty", "0\times\infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Vidéo https://youtu.be/4NQbGdXThrk
Vidéo https://youtu.be/8tAVa4itblc
Vidéo https://youtu.be/pmWPfsQaRWI

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

1) • $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$

On reconnait une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

• Levons l'indétermination (méthode de la factorisation par le monôme de plus haut degré) :

$$-3x^3+2x^2-6x+1 = x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

• Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$
Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3} = -3$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1 = -\infty.$

2) • En appliquant la méthode de la question 1) pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, cela nous conduit à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".
• Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

• Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0.$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 6-\frac{5}{x^2}=6$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{1}{3}.$

3) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination :

$$\frac{3x^2+2}{4x-1}=\frac{x^2}{x}\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$$

• Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to-\infty} 3+\frac{2}{x^2}=3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} 4-\frac{1}{x}=4$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=\frac{3}{4}$$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x\to-\infty} x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=-\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{4x-1}=-\infty.$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

Vidéo https://youtu.be/n3XapvUfXJQ

Vidéo https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

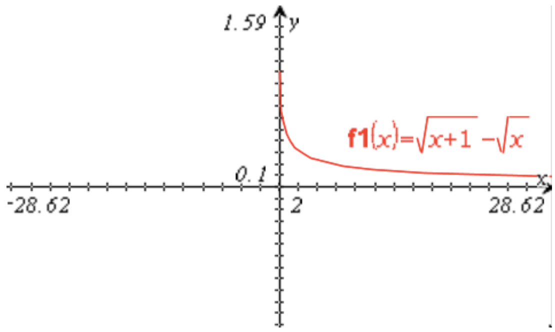
1) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

• Par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$.
Et donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$.
Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.

On peut vérifier la pertinence du résultat en traçant la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.



2) • $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1} - 2 = \sqrt{5-1} - 2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 5} x - 5 = 5 - 5 = 0$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

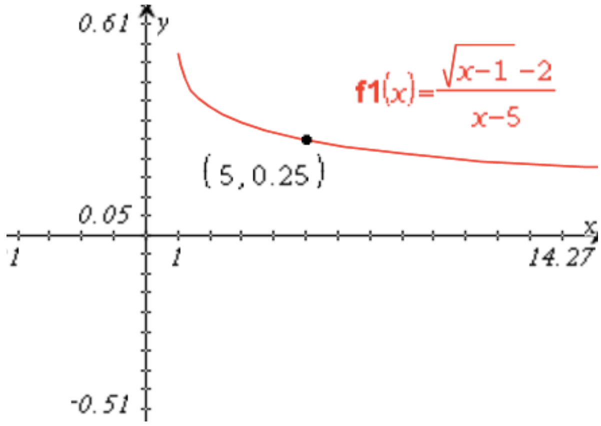
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} &= \frac{\left(\sqrt{x-1} - 2\right)\left(\sqrt{x-1} + 2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1} + 2\right)} \\ &= \frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1} + 2\right)} \\ &= \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1} + 2\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2}\end{aligned}$$

• Or $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{5-1} + 2 = 4$

Donc, par limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.

Soit : $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

En traçant à l'aide de la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, il est possible de vérifier la pertinence de la solution trouvée en plaçant le point de coordonnées (5 ; 0,25).
Attention cependant, la calculatrice ne fait pas nécessairement apparaître que la fonction f n'est pas définie en 5.



Méthode : Déterminer une asymptote

Vidéo https://youtu.be/0LDGK-QkL80
Vidéo https://youtu.be/pXDhrx-nMto

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.
Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc par limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

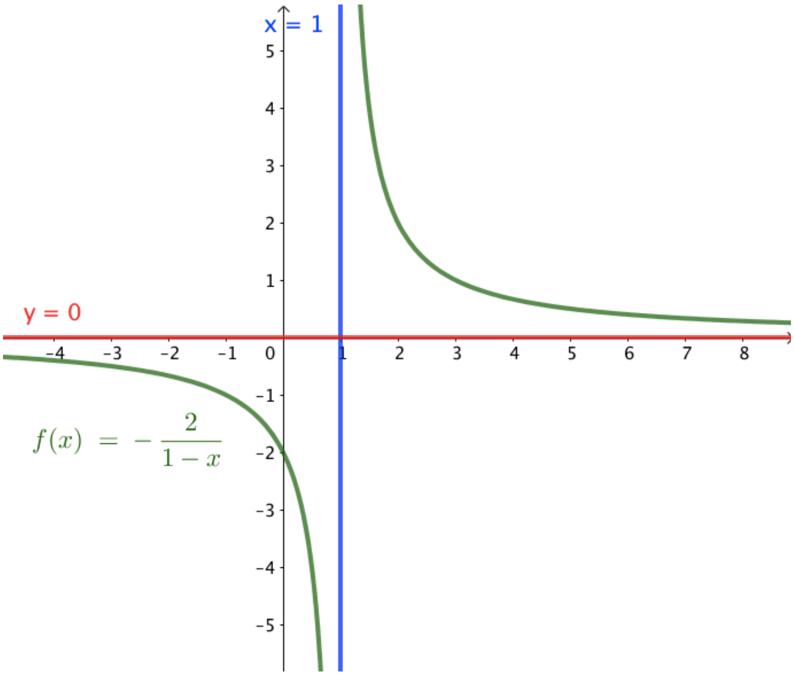
On prouve de même que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} 1 - x = 0^-$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f à gauche de 1 et à droite de 1.

En traçant, à l'aide de la calculatrice, la courbe de la fonction f, il est possible de vérifier les résultats.


x = 1
y = 0
$f(x) = -\frac{2}{1-x}$