

LIMITES DES FONCTIONS

Partie 1 : Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite infinie en ∞

Définition :

On dit que la fonction f admet pour **limite $+\infty$ en $+\infty$** , si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

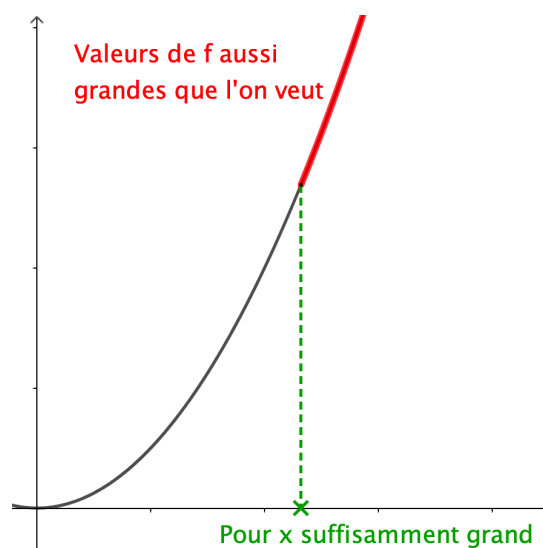
Exemple :

La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a par exemple : $f(100) = 100^2 = 10000$

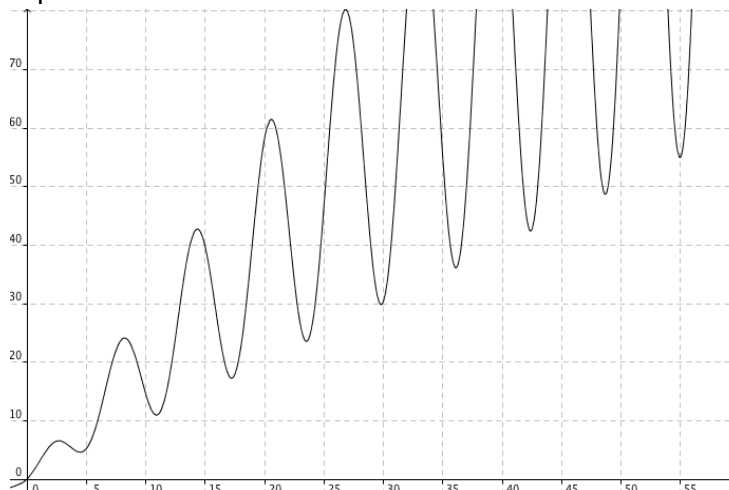
$$f(1000) = 1000^2 = 1\,000\,000$$

Les valeurs de la fonction deviennent **aussi grandes que l'on veut** dès que x est **suffisamment grand**.

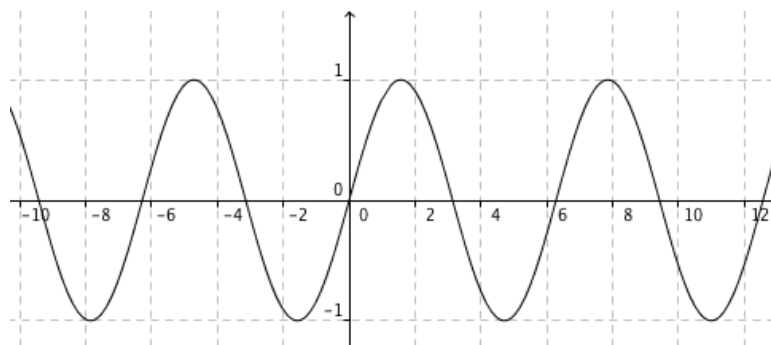


Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante. Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



2) Limite finie en ∞

Définition :

On dit que la fonction f admet pour **limite L en $+\infty$** , si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

Exemple :

La fonction définie par

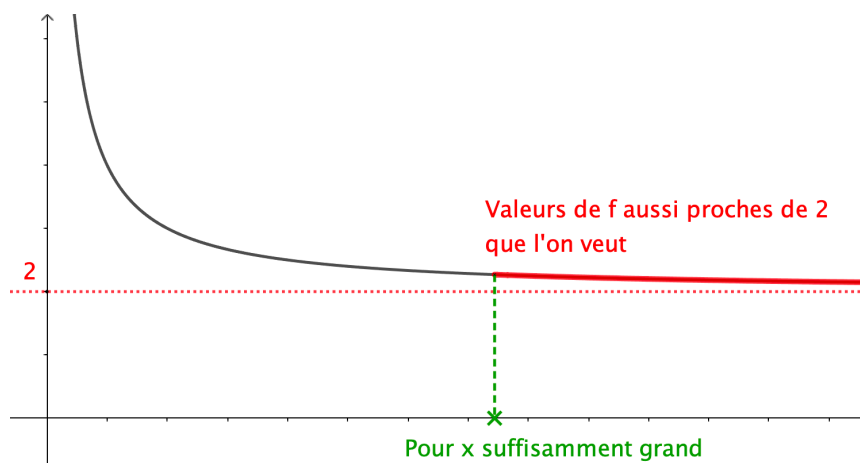
$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

On a par exemple :

$$f(100) = 2 + \frac{1}{100} = 2,01$$

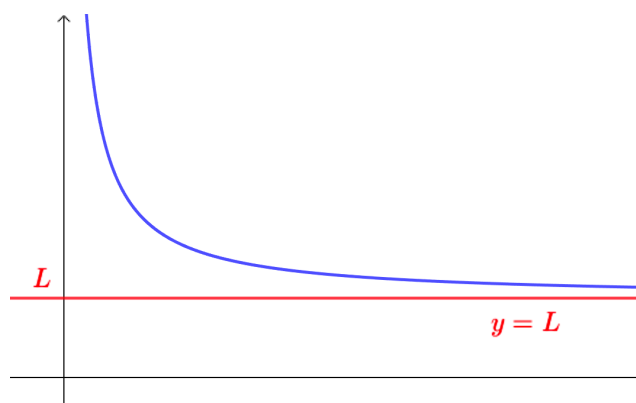
$$f(10000) = 2 + \frac{1}{10000} = 2,0001$$



Les valeurs de la fonction se resserrent **autour de 2** dès que x **est suffisamment grand**.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $y = 2$ sans jamais la toucher.

Définition : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction f en $+\infty$.



Remarques :

- Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.
- On a une définition analogue en $-\infty$.

3) Limites des fonctions de référencePropriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Partie 2 : Limite d'une fonction en un réel A1) DéfinitionDéfinition :

On dit que la fonction f admet pour **limite $+\infty$ en A** , si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A .

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{3-x} + 1$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 3.

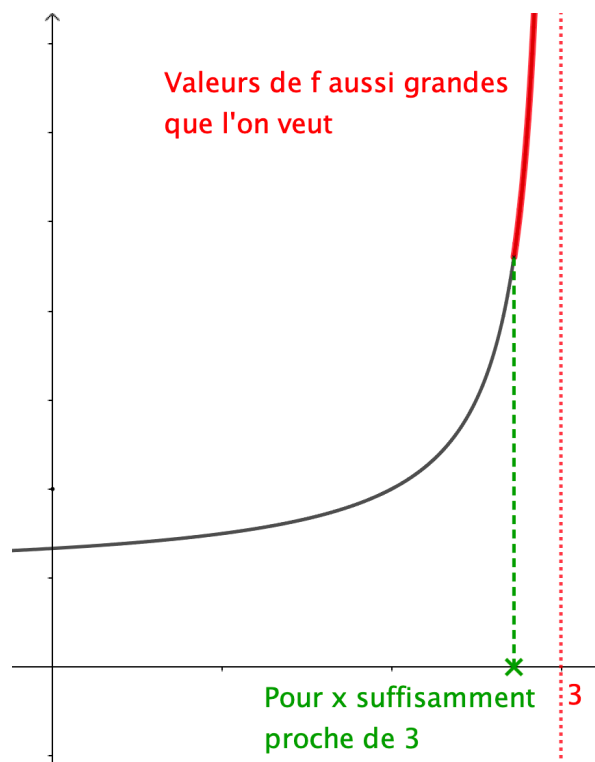
On a par exemple :

$$f(2,99) = \frac{1}{3 - 2,99} + 1 = 101$$

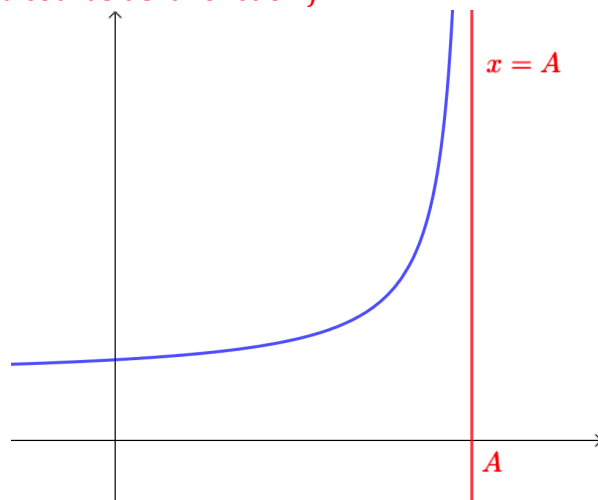
$$f(2,9999) = \frac{1}{3 - 2,9999} + 1 = 10\,001$$

Les valeurs de la fonction **deviennent aussi grandes que l'on veut** dès que x est **suffisamment proche de 3**.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $x = 3$ sans jamais la toucher.



Définition : Si : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = A$ est appelée **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f .



2) Limite à gauche, limite à droite :

Exemple :

Considérons la fonction inverse définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

La fonction f admet des limites différentes en 0 selon que :

$x > 0$ ou $x < 0$.

- Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :

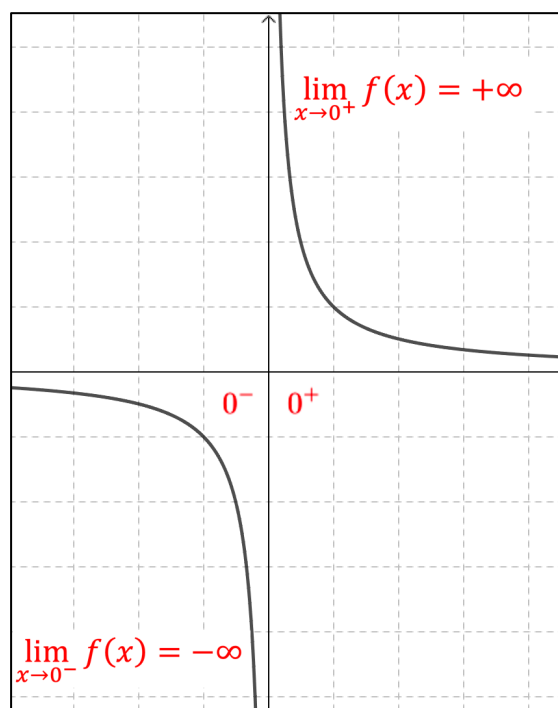
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

On parle de **limite à droite de 0**

- Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

On parle de **limite à gauche de 0**.



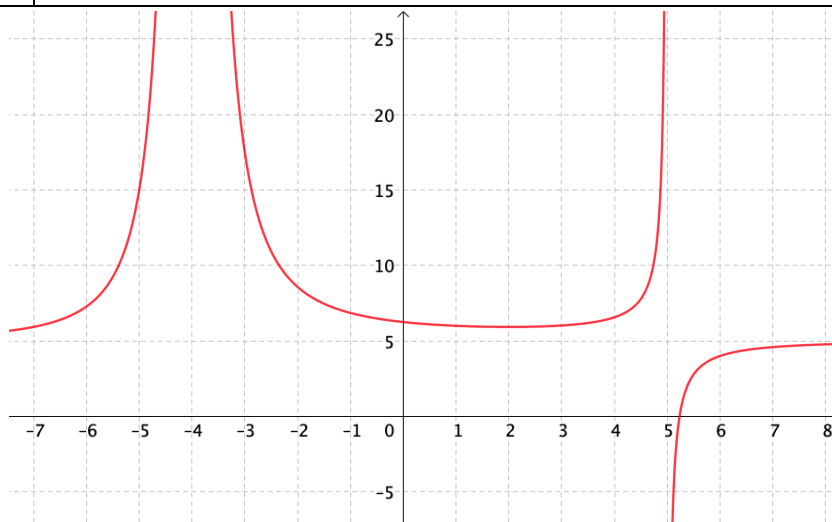
Méthode : Déterminer graphiquement des limites d'une fonction

 **Vidéo** <https://youtu.be/9nEJCL3s2eU>

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f .

- Lire graphiquement les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en -4 et en 5.
- Compléter alors le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$					



Correction

a) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $-\infty$ et $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = +\infty$

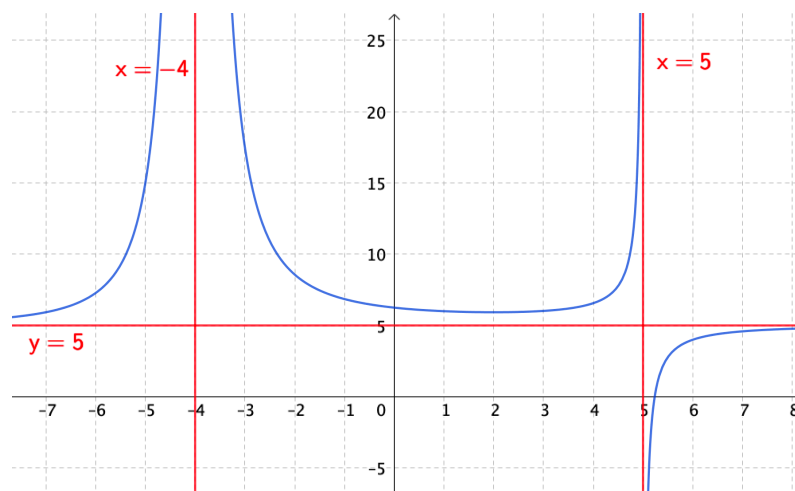
La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

• $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

2)

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$	5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5
		\uparrow	\downarrow	\uparrow	\uparrow
			6		$-\infty$



Partie 3 : Opérations sur les limites

1) Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

SOMME

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

PRODUIT

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Méthode : Calculer la limite d'une fonction à l'aide des formules d'opération

 Vidéo <https://youtu.be/at6pFx-Umfs>

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x}{x-3}$

Correction

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2) = ?$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 5 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + x^2 = +\infty \end{cases}$$

Comme limite d'un produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2) = -\infty$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = ?$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 - 2x = 1 - 2 \times 3 = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 = 0^- \end{cases}$$

Une limite de la forme « $\frac{5}{0}$ » est égale à « ∞ ».

Donc, d'après la règle des signes, une limite de la forme « $\frac{-5}{0^-}$ » est égale à « $+\infty$ ».

D'où, comme **limite d'un quotient** : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = +\infty$.

2) Cas des formes indéterminée (non exigible)

Comme pour les suites, on rappelle que :

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

$$\infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (1) – NON EXIGIBLE

 **Vidéo** <https://youtu.be/4NQBdXThrk>

$$\text{Calculer : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$$

Correction

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = ?$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty. \end{cases}$$

On reconnaît une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination en **factorisant par le monôme de plus haut degré** :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{cases}$$

Donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$$

Soit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -\infty$.

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations – NON EXIGIBLE

▶ Vidéo <https://youtu.be/8tAVa4itblc>

▶ Vidéo <https://youtu.be/pmWPfsQaRWI>

Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$

Correction

a) • En appliquant la méthode précédente pour le numérateur et le dénominateur cela conduirait à une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$.

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 - \frac{5}{x^2} = 6$$

• Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{1}{3}$.

b) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

$$\frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{2}{x^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - \frac{1}{x} = 4$$

- Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

- De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, donc, comme limite d'un produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

Soit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1} = -\infty$.

Méthode : Déterminer une asymptote

▶ Vidéo <https://youtu.be/OLDGK-QkL80>

▶ Vidéo <https://youtu.be/pXDhrx-nMto>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.

Correction

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

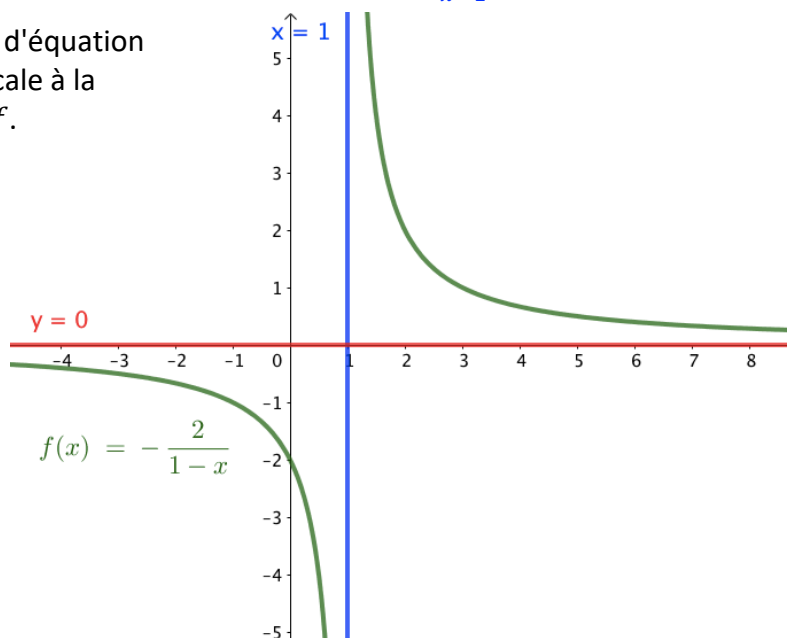
On prouve de même que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0^+$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - x = 0^-$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .



Partie 4 : Calculs de limites par composition et comparaison

1) Composition de limites

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

▶ Vidéo <https://youtu.be/DNU1M3li76k>

▶ Vidéo https://youtu.be/f5i_u8XVMfc

Soit la fonction f définie sur $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$ par : $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Correction

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$

Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

En effet, si $x \rightarrow +\infty$, on a : $X = 2 - \frac{1}{x} \rightarrow 2$ et donc : $\lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

2) Comparaison

Méthode : Calculer une limite par comparaison

▶ Vidéo <https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y>

Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$

Correction

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

• $-1 \leq \sin x$, donc : $x - 1 \leq x + \sin x$.

• Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$$

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction $x \mapsto x - 1$ pousse la fonction $x \mapsto x + \sin x$ vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales