LIMITES DES FONCTIONS

**Partie 1 : Limite d'une fonction à l'infini**

 1) Limite infinie en

Définition :

On dit que la fonction admet pour **limite en** ,

si est aussi grand que l’on veut pourvu que soit suffisamment grand.

Remarque : On a une définition analogue en .

Exemple :

La fonction définie par a pour limite lorsque tend vers .

On a par exemple :

Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que est suffisamment grand.

Remarques :

- Une fonction qui tend vers lorsque tend vers n'est pas nécessairement croissante. Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



 2) Limite finie en

Définition :

On dit que la fonction admet pour **limite en** ,

si est aussi proche de que l’on veut, pourvu que soit suffisamment grand et on

note : .

Remarque : On a une définition analogue en .



Exemple :

La fonction définie par a pour limite 2 lorsque tend vers .

On a par exemple :

Les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que est suffisamment grand.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d’équation sans jamais la toucher.

Définition : Si , la droite d'équation est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction en .



Remarques :

* Lorsque tend vers , la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.
* On a une définition analogue en .

 3) Limites des fonctions de référence

Propriétés :

- ,

- ,

-

- ,

- ,

**Partie 2 : Limite d'une fonction en un réel A**

1. Définition

Définition :

On dit que la fonction admet pour **limite en** ,

si est aussi grand que l’on veut pourvu que soit suffisamment proche de .

Exemple :

La fonction définie par a pour limite lorsque tend vers .

On a par exemple :

Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que est suffisamment proche de .

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d’équation sans jamais la toucher.

Définition : Si : ou , la droite d'équation est appelée **asymptote verticale** à la courbe de la fonction .



2) Limite à gauche, limite à droite :

Exemple :

Considérons la fonction inverse définie sur par .

La fonction admet des limites différentes en selon que :

 ou .

● Si  : Lorsque tend vers 0, tend vers et on note :

ou .

On parle de **limite à droite de 0**

● Si  : Lorsque tend vers 0, tend vers et on note :

 ou .

On parle de **limite à gauche de 0**.

Méthode : Déterminer graphiquement des limites d'une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/9nEJCL3s2eU**](https://youtu.be/9nEJCL3s2eU)

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction .

a) Lire graphiquement les limites en en , en et en .

b) Compléter alors le tableau de variations de .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |



**Correction**

a) ●

La courbe de admet une asymptote horizontale d’équation en et

 ●

La courbe de admet une asymptote verticale d’équation

 ● et

La courbe de admet une asymptote verticale d’équation

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |    |

2)



**Partie 3 : Opérations sur les limites**

1) Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

 peut désigner , ou un nombre réel.

**SOMME**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | F.I.\* |

\* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

**PRODUIT** désigne ou

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est ou .

**QUOTIENT** désigne ou

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |   |  |  |  | 0 |
|  |  |   |  |  |  | 0 |
|  |  |  |  |  | F.I. | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est ou .

Méthode : Calculer la limite d'une fonction à l'aide des formules d'opération

 **Vidéo** [**https://youtu.be/at6pFx-Umfs**](https://youtu.be/at6pFx-Umfs)

Déterminer les limites suivantes : a) b)

**Correction**

a)

Comme limite d'un produit :

b)

Une limite de la forme «  » est égale à «  ».

Donc, d’après la règle des signes, une limite de la forme «  » est égale à « + ».

D’où, comme limite d'un quotient : .

2) Cas des formes indéterminée (non exigible)

Comme pour les suites, on rappelle que :

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

Méthode : Lever une forme indéterminée à l’aide de factorisations (1) – NON EXIGIBLE

 **Vidéo** [**https://youtu.be/4NQbGdXThrk**](https://youtu.be/4NQbGdXThrk)

Calculer :

**Correction**

•

On reconnait une forme indéterminée du type

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

•.

Donc, par limite d’une somme :

Donc, par limite d’un produit :

Soit : .

Méthode : Lever une forme indéterminée à l’aide de factorisations – NON EXIGIBLE

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8tAVa4itblc**](https://youtu.be/8tAVa4itblc)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pmWPfsQaRWI**](https://youtu.be/pmWPfsQaRWI)

Calculer : a) b)

**Correction**

a) • En appliquant la méthode précédente pour le numérateur et le dénominateur cela conduirait à une forme indéterminée du type .

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

• .

Donc, comme limite de sommes :

• Donc, comme limite d’un quotient :

Soit : .

b) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

•

Donc, comme limite de sommes :

• Donc, comme limite d’un quotient :

• De plus, , donc, comme limite d’un produit :

Soit : .

Méthode : Déterminer une asymptote

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0LDGK-QkL80**](https://youtu.be/0LDGK-QkL80)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pXDhrx-nMto**](https://youtu.be/pXDhrx-nMto)

Soit la fonction définie sur par .

Démontrer que la courbe représentative de la fonction admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.

**Correction**

● donc comme limite d’un quotient, on a : .

On prouve de même que : .

On en déduit que la droite d'équation est asymptote horizontale à la courbe représentative de en et en .

● donc comme limite d’un quotient, on a :

Et donc comme limite d’un quotient, on a :



On en déduit que la droite d'équation est asymptote verticale à la courbe représentative de .

**Partie 4 : Calculs de limites par composition et comparaison**

1. Composition de limites

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/DNU1M3Ii76k**](https://youtu.be/DNU1M3Ii76k)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/f5i\_u8XVMfc**](https://youtu.be/f5i_u8XVMfc)

Soit la fonction définie sur par :

Calculer la limite de la fonction en .

**Correction**

On a : , donc

Donc, comme limite d’une fonction composée :

En effet, si , on a : et donc : .

1. Comparaison

Méthode : Calculer une limite par comparaison

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y**](https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y)

Calculer :

**Correction**

• n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

• donc : .

• Or , donc par comparaison :

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction pousse la fonction

 vers pour des valeurs de suffisamment grandes.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)