FONCTION INVERSE

Partie 1 : Définition et allure de la courbe

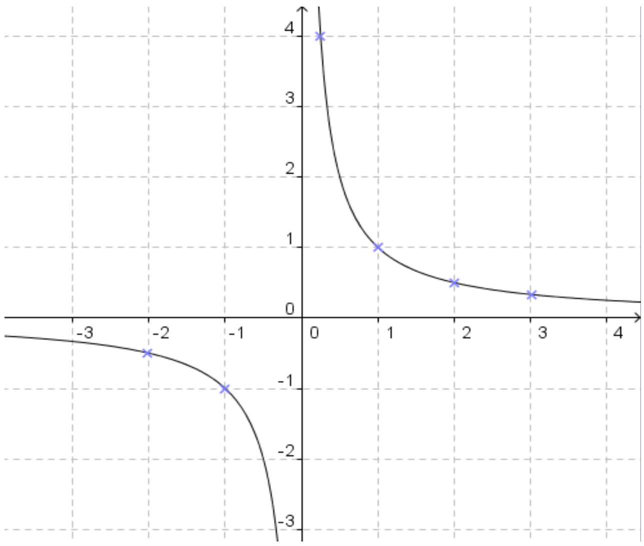
Vidéo https://youtu.be/Vl2rlbFF22Y

1) Définition

Définition : La **fonction inverse** f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

2) Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	$-0,5$	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



Remarque : La courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$ de la fonction inverse, appelée **hyperbole** de centre O, est symétrique par rapport à l'origine.

Partie 2 : Dérivée et sens de variation

1) Dérivée

Propriété : La dérivée de la fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Démonstration (pour les experts) :

Vidéo https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}=-\frac{1}{a(a+h)}$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right)=-\frac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a non nul, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Exemples :

$f(x)=\frac{5}{x} \quad\rightarrow\quad f'(x)=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

$g(x)=\frac{-3}{x} \quad\rightarrow\quad g'(x)=-3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{3}{x^2}$

$h(x)=\frac{4}{3x} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-4}{3x^2}$

2) Variations

Propriété : La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{f'(x)=-\frac{1}{x^2}}$ < 0.

Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction inverse

Vidéo https://youtu.be/P3Ui9-Pk8p8

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=-\frac{2}{x}$

1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) En déduire les variations de f.

Correction :

1) $f(x)=-\frac{2}{x} \quad\rightarrow\quad f'(x)=-2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x^2}$

2) $f'(x)=\frac{2}{x^2}>0$, car $x^2>0$.

La fonction f est donc croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie 3 : Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

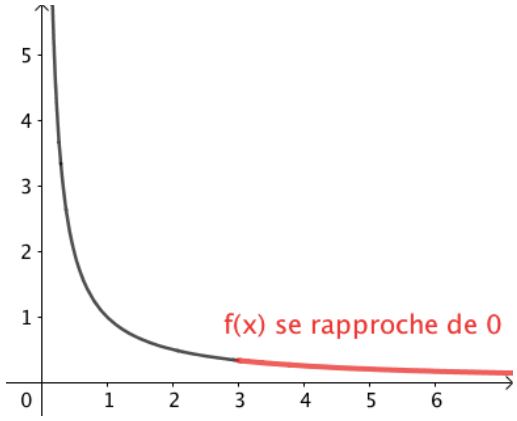
1) En $+\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand.

x	5	10	100	10 000	…
$f(x)$	0,2	0,1	0,01	0,000 1	?

On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus grand.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus grandes, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

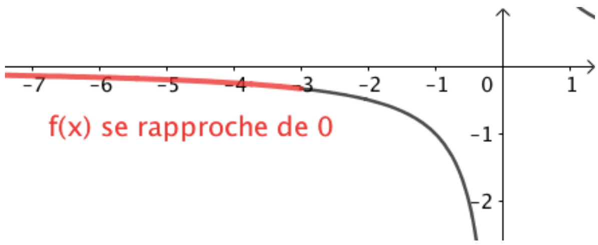


2) En $-\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus « grand dans les négatifs »

x	…	-10 000	-100	-10	-5
$f(x)$	?	-0,000 1	-0,01	-0,1	-0,2

On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus « grand dans les négatifs ».
On dit que la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 et on note :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus « grandes dans les négatifs », la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

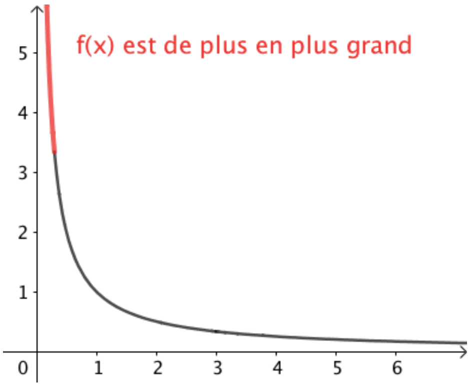
On dit que l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$.

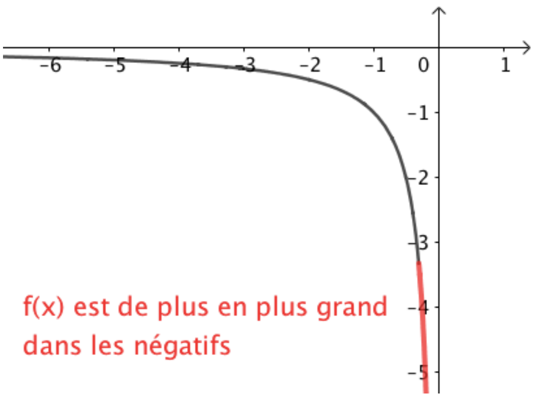
3) <u>Au voisinage de 0</u>

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	-2	-10	-100	-1 000	?	1 000	100	10	2

A l'aide de la calculatrice, on constate que :
- Pour $x > 0$: $f(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x > 0$ est égale à $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.
Graphiquement, pour des valeurs positives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.





- Pour $x < 0$: $f(x)$ devient de plus en plus « grand dans les négatifs » lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x < 0$ est égale à $-\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, pour des valeurs négatives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

On dit que l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse.

Partie 4 : Somme d'une fonction polynôme et d'une fonction inverse

<u>Méthode :</u> Étudier une fonction obtenue comme somme de la fonction inverse et d'une fonction polynôme

Vidéo https://youtu.be/P3Ui9-Pk8p8

Soit la fonction f définie sur $]0\,;5[$ par $f(x) = 1 - 2x + \dfrac{2}{x}$

1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Dresser le tableau de variations de f.
3) Représenter la fonction f dans un repère.

Correction

1) On a : $f(x) = 1 - 2x + 2 \times \frac{1}{x}$

Donc : $f'(x) = -2 + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -2 - \frac{2}{x^2}$

2) $-\frac{2}{x^2} < 0$ car $x^2 > 0$

Donc $f'(x) = -2 - \frac{2}{x^2} < 0$

On dresse alors le tableau de variations :

x	0		5
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	-8,6

En effet :
- En testant, pour des valeurs positives de plus en plus en proches de 0, $f(x)$ devient de plus en plus grand.
- $f(5) = 1 - 2 \times 5 + 2 \times \frac{1}{5} = -8{,}6$

3) L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de la fonction f.