FONCTION INVERSE

I. Définition et allure de la courbe

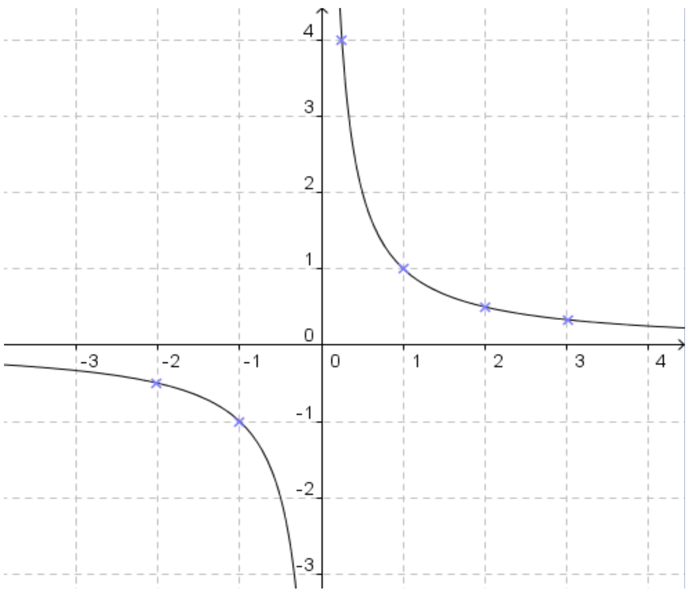
Vidéo https://youtu.be/VI2rIbFF22Y

1) Définition

Définition : La **fonction inverse** f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

2) Représentation graphique

x	-2	-1	$0{,}25$	1	2	3
$f(x)$	$-0{,}5$	-1	4	1	$0{,}5$	$\frac{1}{3}$



Remarque :
La courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$ de la fonction inverse, appelée **hyperbole** de centre O, est symétrique par rapport à l'origine.

II. Dérivée et sens de variation

1) Dérivée

Propriété : La dérivée de la fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Démonstration (pour les experts) :

Vidéo https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}=-\frac{1}{a(a+h)}$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right)=-\frac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

2) Variations

Propriété : La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

III. Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

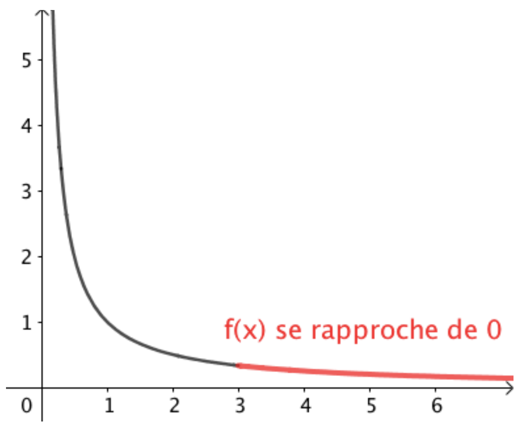
1) En $+\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand.

x	5	10	100	10000	…
$f(x)$	0,2	0,1	0,01	0,0001	?

On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus grand.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note :
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus grandes, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

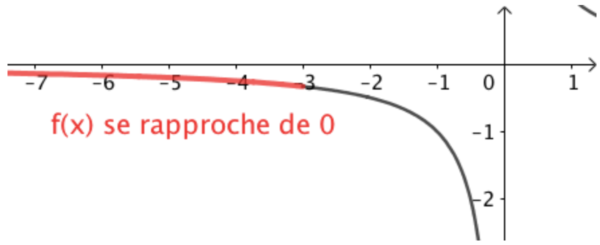


2) En $-\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus « grand dans les négatifs »

x	…	-10000	-100	-10	-5
$f(x)$	?	-0,0001	-0,01	-0,1	-0,2

On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus « grand dans les négatifs ».
On dit que la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 et on note :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus « grandes dans les négatifs », la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

On dit que l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Au voisinage de 0

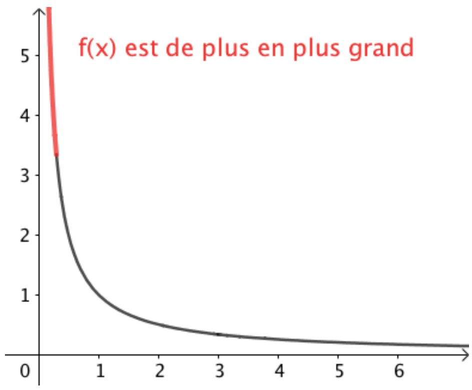
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

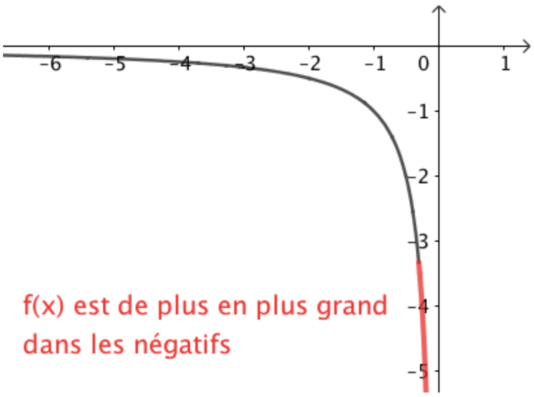
x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	-2	-10	-100	-1000	?	1000	100	10	2

A l'aide de la calculatrice, on constate que :
- Pour $x > 0$: $f(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x > 0$ est égale à $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

Graphiquement, pour des valeurs positives, de plus en plus proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.





- Pour $x < 0$: $f(x)$ devient de plus en plus « grand dans les négatifs » lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x < 0$ est égale à $-\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, pour des valeurs négatives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

On dit que l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse.

Méthode : Étudier une fonction obtenue par combinaisons linéaires de la fonction inverse et d'une fonction polynomiale

Vidéo https://youtu.be/P3Ui9-Pk8p8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 1 - 2x - \dfrac{2}{x}$
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) Représenter la fonction f dans un repère.

Rappels sur les formules de dérivation :

$(f+g)' = f' + g'$
$(kf)' = kf' \quad a \in \mathbb{R}$

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

1) On a : $f(x) = 1 - 2x - 2 \times \dfrac{1}{x}$

Donc : $f'(x) = -2 - 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

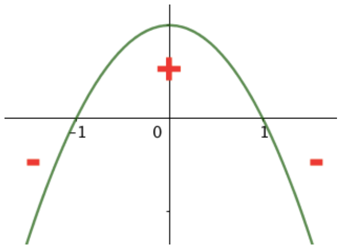
$= -2 + \dfrac{2}{x^2}$

$= \dfrac{-2x^2}{x^2} + \dfrac{2}{x^2}$

$= \dfrac{2-2x^2}{x^2}$

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $2 - 2x^2 = 0$
Donc : $2 = 2x^2$
Soit : $x^2 = 1$
Et donc : $x = 1$ ou $x = -1$.
f' est du signe du numérateur car le dénominateur est positif.

Le numérateur est une fonction du second degré représentée par une parabole sont les branches sont tournées vers le bas ($a = -2$ est négatif).
Elle est donc d'abord négative (avant $x = -1$) puis positive (entre $x = -1$ et $x = 1$) et à nouveau négative (après $x = 1$).



3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f		↘	5	↗	‖	↗	-3	↘	

En effet : $f(-1) = 1 - 2 \times (-1) - \dfrac{2}{-1} = 5$

$f(1) = 1 - 2 \times 1 - \dfrac{2}{1} = -3$

4) En testant, pour des valeurs négatives de plus en plus en proches de 0, $f(x)$ devient de plus en plus grand. Pour des valeurs positives, $f(x)$ devient de plus en plus « grand dans les négatifs ».
L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de la fonction f.