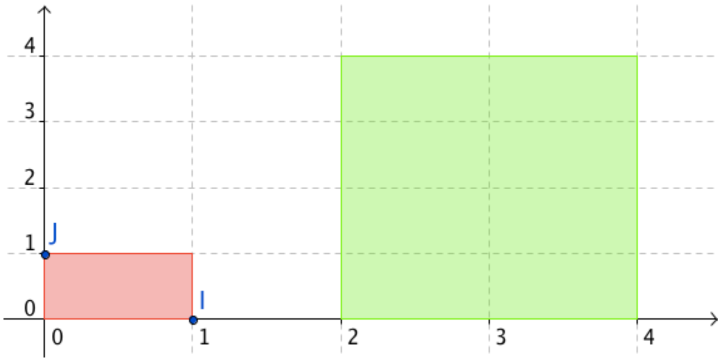
INTÉGRATION – Chapitre 1/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/pFKzXZrMVxs

En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).
Au milieu du XIXe siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

Partie 1 : Intégrale et aire

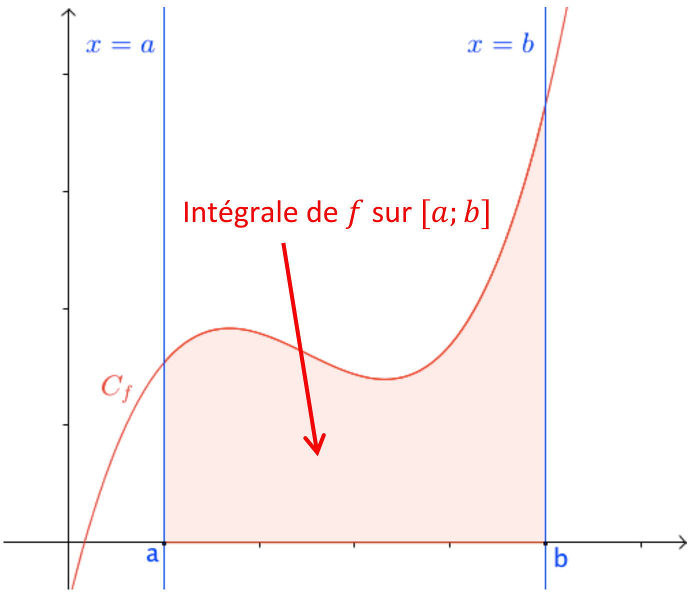
1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1.
Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a\,;b]$ se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Et on lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».

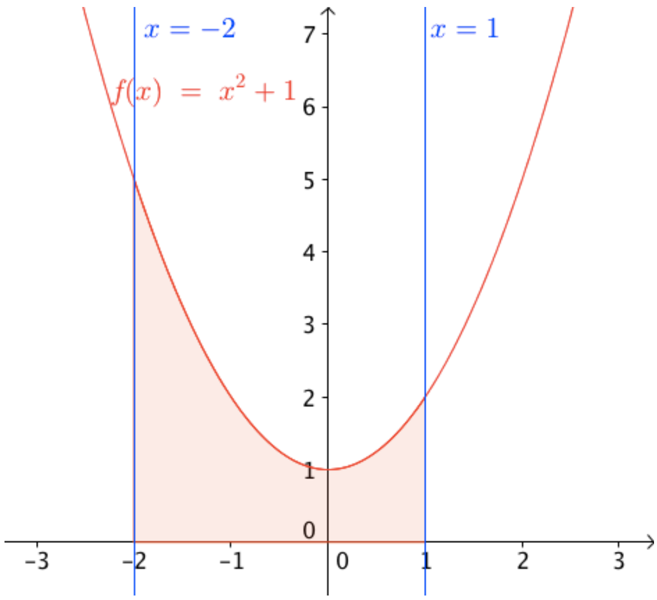
Remarques :
- a et b sont appelés les **bornes d'intégration**.
- x est la **variable d'intégration**. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.
"dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Exemple :
L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\ 1]$ et se note :

$$\int_{-2}^{1} x^2 + 1\,dx$$

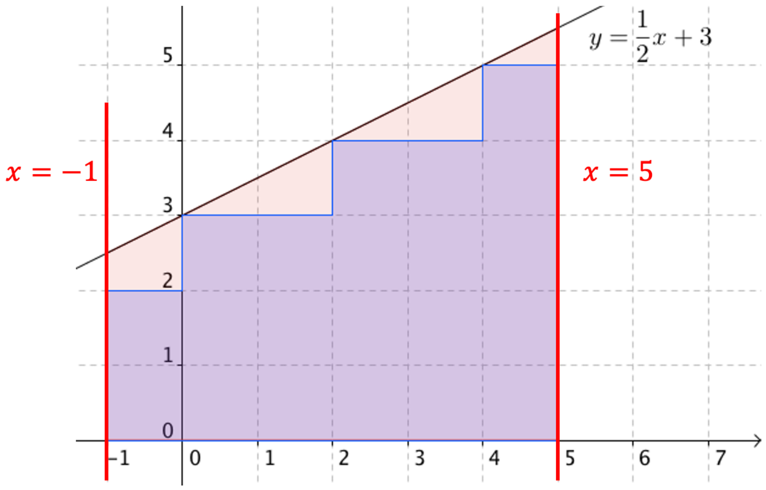


Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (1)

Vidéo https://youtu.be/jkxNKkmEXZA

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.
b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

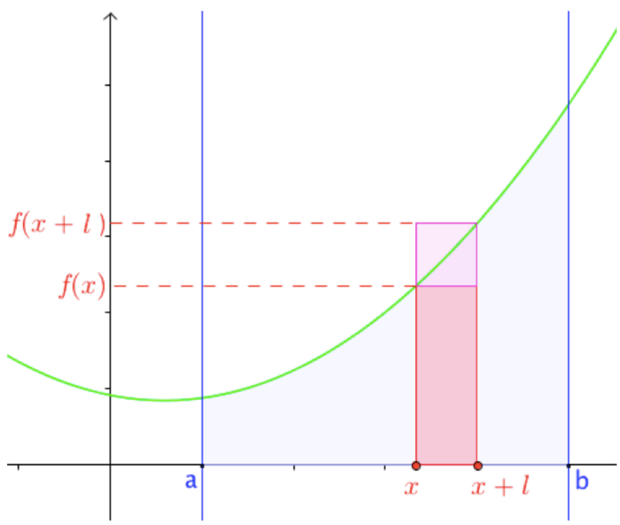
Correction
a)



b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.
Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 21\,u.a. + 3\,u.a. = 24\,u.a.$

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x\,;x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :
- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire : $l \times f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire $l \times f(x+l)$.



Sur l'intervalle $[a\ ; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement :

Langage naturel

Définir fonction rectangle(a, b, n)
 	
L ← (b-a)/n
x ← a
m ← 0
p ← 0
 	
Pour i allant de 0 à n-1
    m ← m+Lxf(*x*)
    x ← *x*+L
    p ← p+Lxf(*x*)
FinPour
 	
Afficher m et p

<u>Exemple :</u>
Avec Python, on programme cet algorithme pour la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [1 ; 2].

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur [1 ; 2].

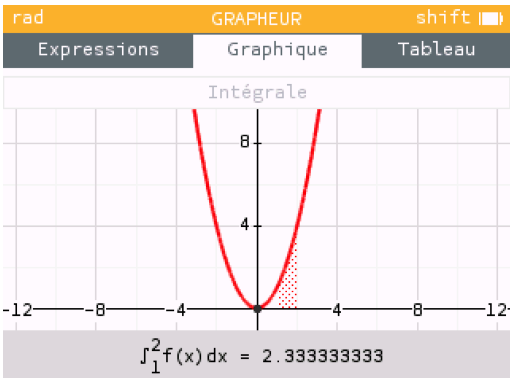
```python
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
>>> rectangle(1,2,10)
(2.1850000000000014, 2.4850000000000017)
>>> rectangle(1,2,50)
(2.3034000000000017, 2.3634000000000017)
>>> rectangle(1,2,100)
(2.318350000000003, 2.3483500000000026)
>>>
```

On en déduit que : $2{,}31 < \int_1^2 x^2 \ dx < 2{,}35$

Il est possible de vérifier avec la calculatrice :



Calculer une intégrale avec la calculatrice :

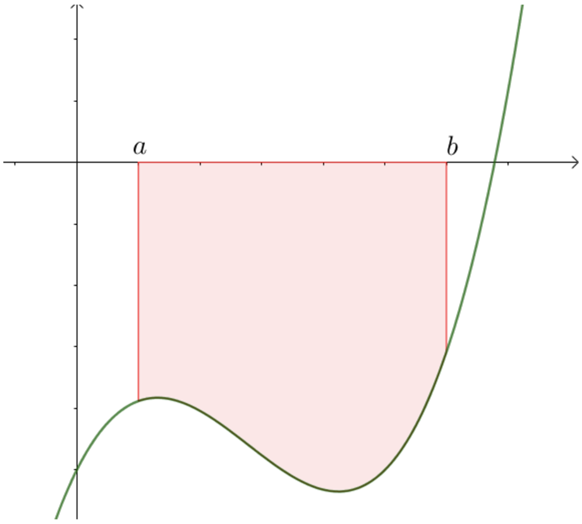
Vidéo TI https://youtu.be/0Y3VT73yvVY
Vidéo Casio https://youtu.be/hHxmizmbY_k
Vidéo HP https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo

5) Extension aux fonctions de signe quelconque

Propriété : Soit f une fonction continue et NÉGATIVE sur un intervalle $[a\,;b]$.
L'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par :
- la courbe représentative de la fonction f,
- l'axe des abscisses,
- et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

est égal à :

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$



Propriétés sur les bornes d'intégration :

$a)$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$b)$ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

$c)$ Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (2)

Vidéo https://youtu.be/l2zuaZukc0g

Représenter la droite d'équation $y = 3 - x$ dans un repère.
En déduire $\int_2^5 3 - x\,dx$ en effectuant des calculs d'aire.

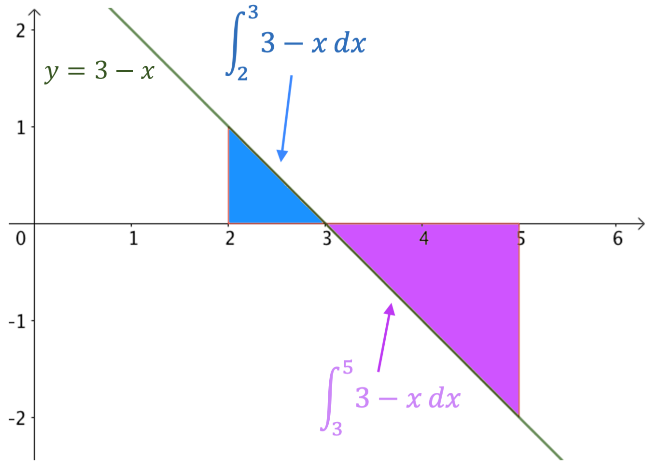
Correction
La droite d'équation $y = 3 - x$ coupe l'axe des abscisses en $x = 3$.
Donc, $3 - x \geq 0$ sur l'intervalle $[2\,;3]$
Et, $3 - x \leq 0$ sur l'intervalle $[3\,;5]$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_2^5 3 - x\,dx = \int_2^3 3 - x\,dx + \int_3^5 3 - x\,dx$$

Donc :

$$\int_2^5 3 - x\,dx = \frac{1 \times 1}{2} + \left(-\frac{2 \times 2}{2}\right)$$
$$= -1{,}5$$



<u>Remarque :</u>
Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.
On a par exemple :

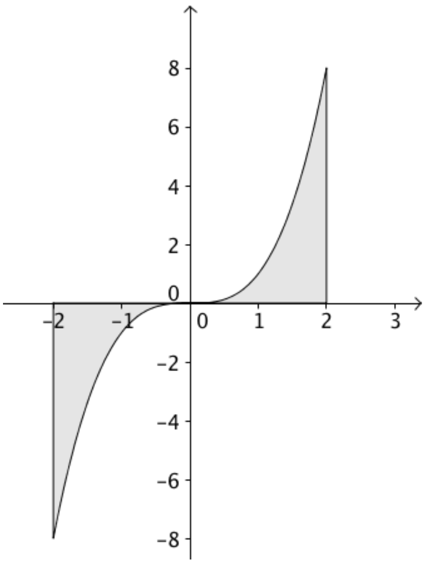
$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = 0$$

En effet, la courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère, donc :

$$\int_{-2}^{0} x^3\,dx = -\int_0^2 x^3\,dx$$

Et donc :

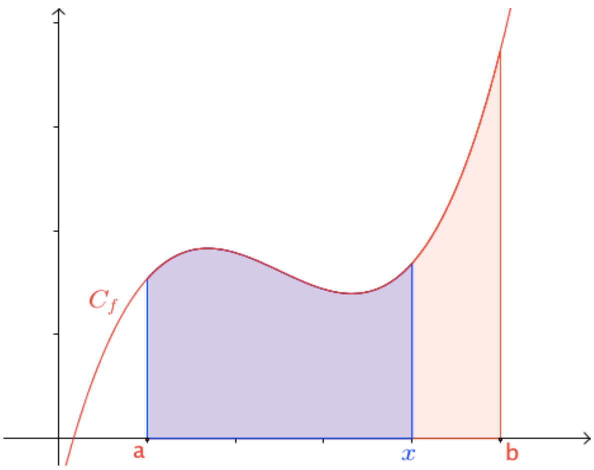
$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_0^2 x^3\,dx = 0$$



Partie 2 : Intégrale et primitive

1) Fonction définie par une intégrale

<u>Théorème :</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par :
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.



Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

Vidéo https://youtu.be/6DHXw5TRzN4

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$.
a) Étudier les variations de F.
b) Tracer sa courbe représentative.

Correction

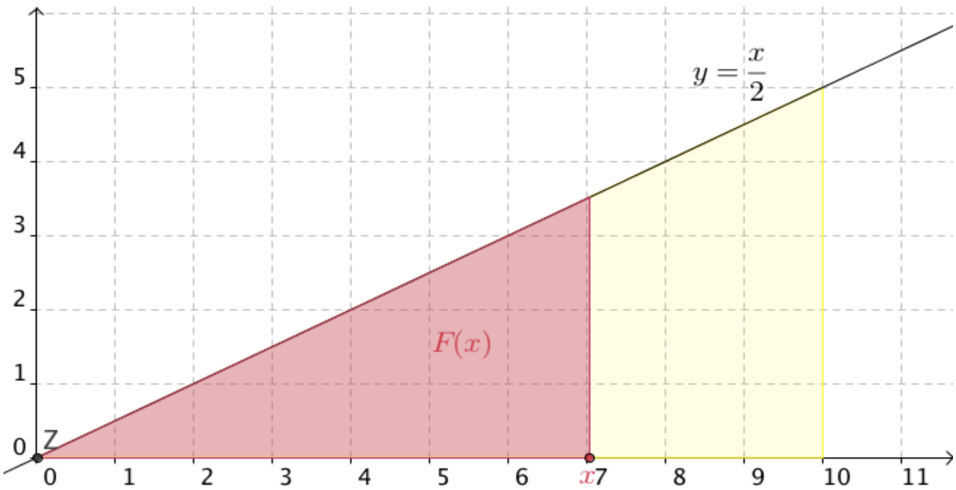
a) $t \longmapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur [0 ; 10] donc F est dérivable sur [0 ; 10] et $F'(x) = \frac{x}{2} \geq 0$.

Donc F est croissante sur [0 ; 10].

On dresse le tableau de variations :

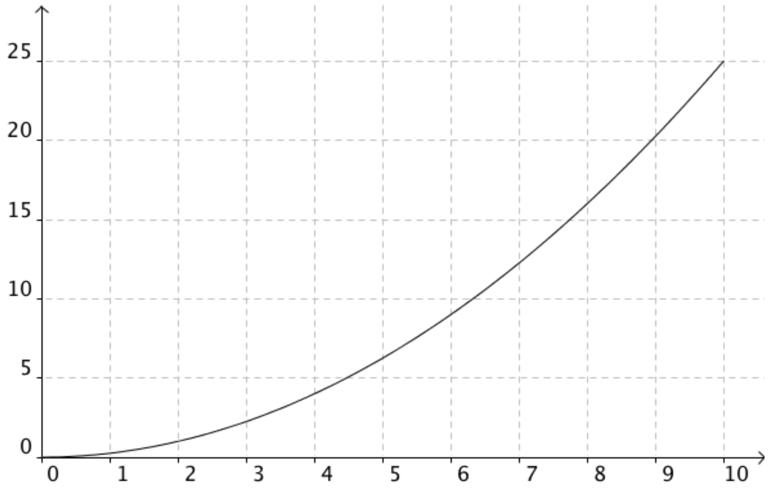
x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0	25

$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.
Ainsi $F(10) = \frac{10 \times 5}{2} = 25\ u.a.$



b) Pour tout x de [0 ; 10], on a $F(x) = \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}\ u.a.$

On a ainsi la représentation graphique de F :



2) Calcul d'intégrales

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Si F est une primitive de f alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Rappels de la classe de 1ère : Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitive
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$
$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Vidéo https://youtu.be/8ci1RrNH1L0

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 x^2\,dx \qquad B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx \qquad C = \int_0^{\pi} 4\cos(t + \pi)\,dt$$

Correction

$A = \displaystyle\int_1^4 x^2\,dx$

On a : $f(x) = x^2$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

Donc :

$A = \displaystyle\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4 = F(4) - F(1) = \frac{1}{3} \times 4^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{63}{3} = 21$

$B = \displaystyle\int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx$

On a : $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$

Donc :

$B = [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5$

$\quad = 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) = 144$

$C = \displaystyle\int_0^\pi 4\cos(t + \pi)\,dt$

On a : $f(x) = 4\cos(2t + \pi)$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = 2\sin(2t + \pi)$

Donc :

$C = \displaystyle\int_0^\pi 4\cos(t + \pi)\,dx = [2\sin(2t + \pi)]_0^\pi = F(\pi) - F(0)$

$\quad = 2\sin(2\pi + \pi) - 2\sin(2 \times 0 + \pi)$

$\quad = 2\sin(3\pi) - 2\sin(\pi)$

$\quad = 0$

3) Propriété de linéarité

Propriété :

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

Vidéo https://youtu.be/B9n_AArwjKw

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

On donne : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

b) En déduire A et B.

Correction

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A+B=\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\,dx+\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\cos^2(x)+\sin^2(x)\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}1\,dx$$
$$=[x]_0^{2\pi}$$
$$=2\pi$$

$$A-B=\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\,dx-\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\cos^2(x)-\sin^2(x)\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\cos(2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\sin(2\times 2\pi)-\frac{1}{2}\sin(2\times 0)=0$$

b) On a ainsi :

$\begin{cases}A+B=2\pi\\A-B=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}2A=2\pi\\A=B\end{cases}$ soit : $A=B=\pi$

2) Positivité et comparaison

Propriétés :

a) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x)\geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x)\geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$

Méthode : Encadrer une intégrale

Démontrer que :

$$0\leq\int_0^1 x^2\,dx\leq\frac{1}{2}$$

Correction

Sur $[0\,;1]$, on a : $0\leq x^2\leq x$. On déduit que :

$$\int_0^1 0\,dx\leq\int_0^1 x^2\,dx\leq\int_0^1 x\,dx$$

$$\int_0^1 0\,dx=0\ \text{ et }\ \int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

D'où :

$$0\leq\int_0^1 x^2\,dx\leq\frac{1}{2}$$