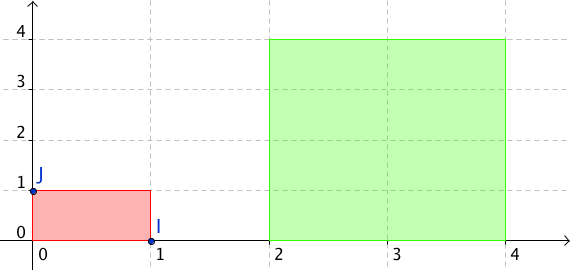
INTÉGRATION – Chapitre 1/2

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/pFKzXZrMVxs**](https://youtu.be/pFKzXZrMVxs)



En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l’équation de la courbe pour calculer l’aire sous la courbe, c’est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).

Au milieu du XIXe siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l’idée qu’une personne s’intègre à un groupe.

**Partie 1 : Intégrale et aire**

1. Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1.

Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

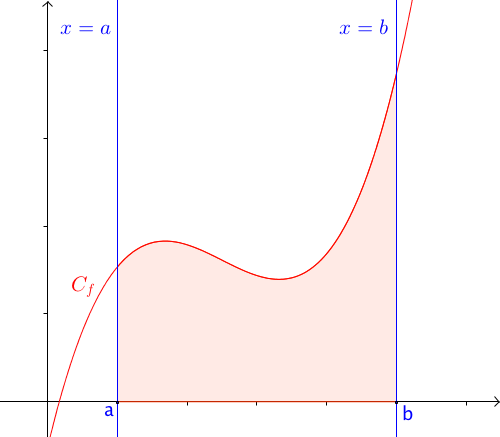
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit une fonction continue et positive sur un intervalle .

On appelle **intégrale** de sur l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la

fonction , l'axe des abscisses et les

droites d'équations et .

Intégrale de sur

3) Notation

L'intégrale de la fonction sur se note :

Et on lit « intégrale de à de ».

Remarques :

- et sont appelés les **bornes d'intégration**.

- est la **variable d’intégration**. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : .

"" ou "" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

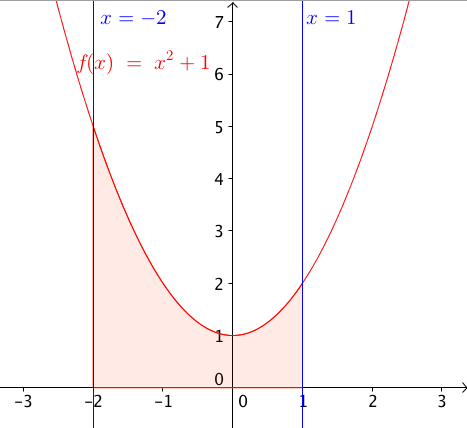


Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme **s**omme infinie d'autres aires.

Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction définie par , l'axe des abscisses et les droites d'équations et est l'intégrale de la fonction sur l'intervalle et se note :



Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/jkxNKkmEXZA**](https://youtu.be/jkxNKkmEXZA)

a) Tracer la représentation graphique de la fonction définie par dans un repère orthonormé.

b) Calculer .

**Correction**

a)

Une image contenant graphique

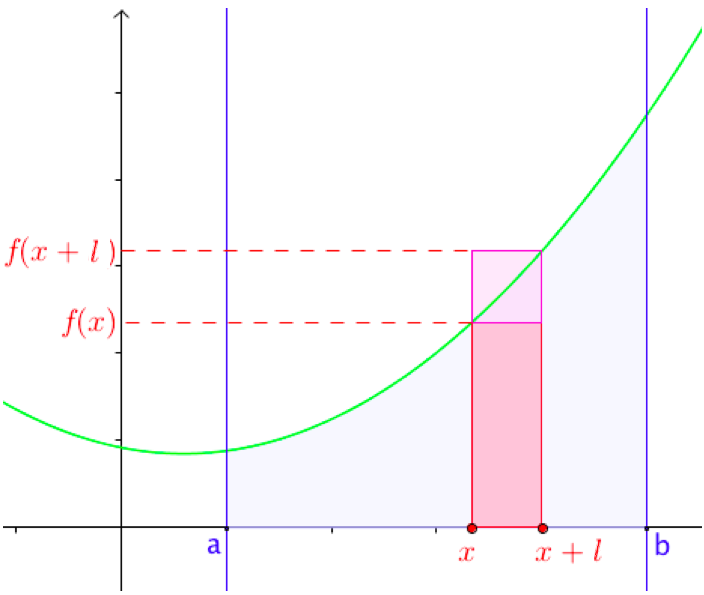
Description générée automatiquement

b) Calculer revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction , l'axe des abscisses et les droites d'équations et

.

Donc par dénombrement, on obtient :

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction continue, positive et monotone sur un intervalle .

On partage l'intervalle en sous-intervalles de même amplitude .

Sur un sous-intervalle , l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

* l'un de dimension et qui a pour aire :

;

* l'autre de dimension et qui a pour aire .

Sur l'intervalle , l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des rectangles "inférieurs" et la somme des rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement :

|  |
| --- |
| **Langage naturel** |
| Définir fonction rectangle(a, b, n)  L ← (b-a)/n  *x* ← a  m ← 0  p ← 0  Pour i allant de 0 à n-1  m ← m+Lxf(*x*)  *x* ← *x*+L  p ← p+Lxf(*x*)  FinPour  Afficher m et p |

Une image contenant texte, capture d’écran, Police, nombre

Description générée automatiquement

Exemple :

Avec Python, on programme cet algorithme pour la fonction sur l’intervalle [1 ; 2].

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur [1 ; 2].

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

Une image contenant texte, Police, capture d’écran, ligne

Description générée automatiquement

On en déduit que :

**Une image contenant texte, capture d’écran, Tracé, ligne

Description générée automatiquement**

Il est possible de vérifier avec la calculatrice :

**Calculer une intégrale avec la calculatrice :**

 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/0Y3VT73yvVY**](https://youtu.be/0Y3VT73yvVY)

 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/hHxmizmbY\_k**](https://youtu.be/hHxmizmbY_k)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo**](https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo)

5) Extension aux fonctions de signe quelconque

Propriété : Soit une fonction continue et NÉGATIVE sur un intervalle .

L'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par :

Une image contenant diagramme, ligne, Tracé

Description générée automatiquement - la courbe représentative de la fonction ,

- l'axe des abscisses,

- et les droites d'équations et

est égal à :

Propriétés sur les bornes d’intégration :

Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/l2zuaZukc0g**](https://youtu.be/l2zuaZukc0g)

Représenter la droite d’équation dans un repère.

En déduire en effectuant des calculs d’aire.

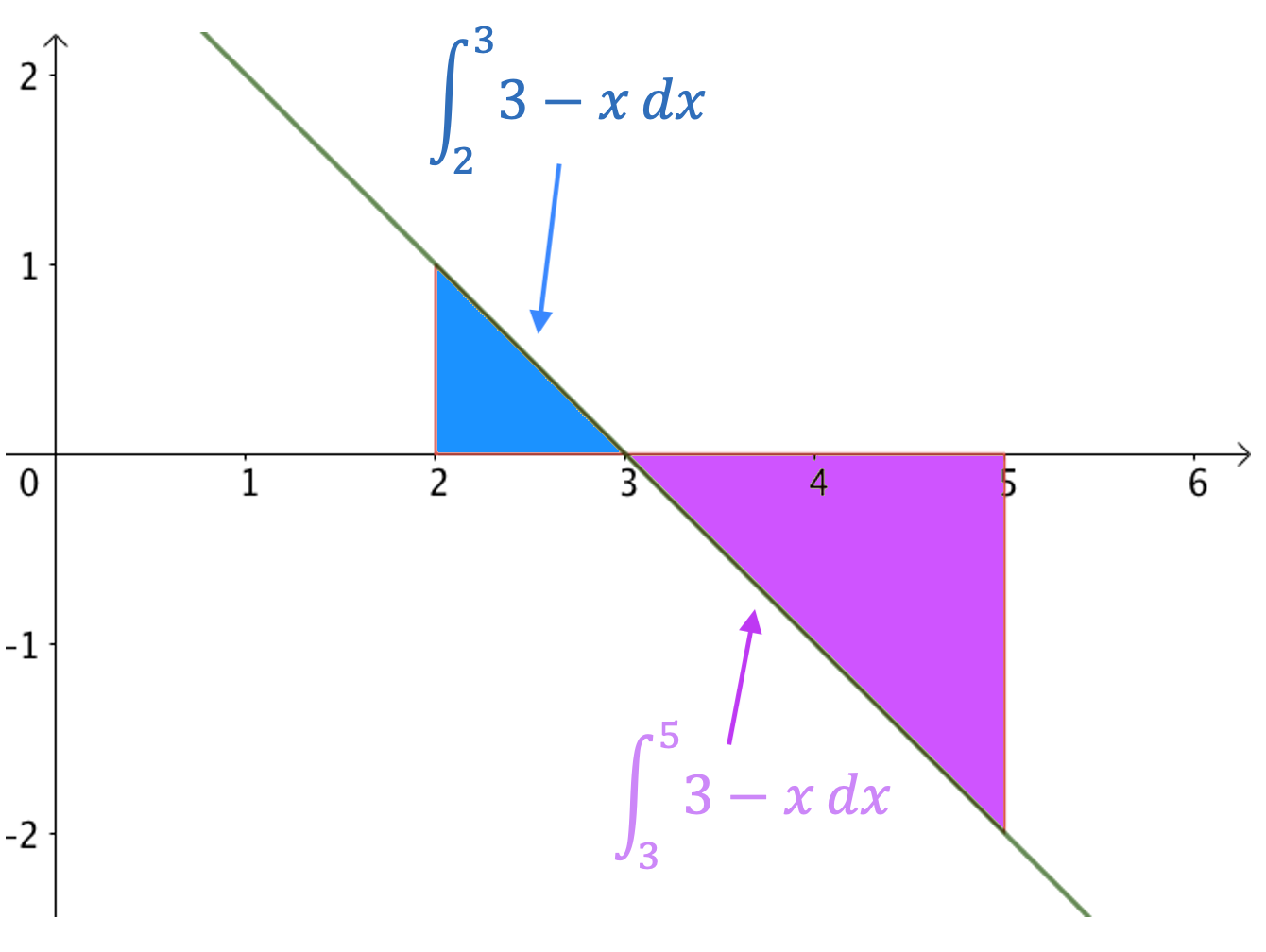
**Correction**

La droite d’équation coupe l’axe des abscisses en .

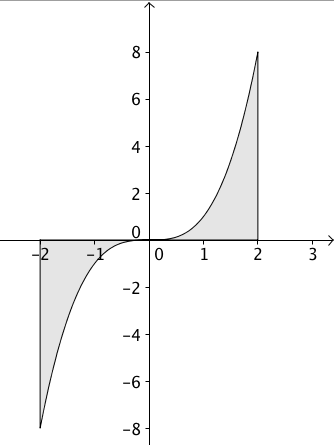
Donc, sur l’intervalle

Et, sur l’intervalle .

D’après la relation de Chasles, on a :



Donc :



Remarque :

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

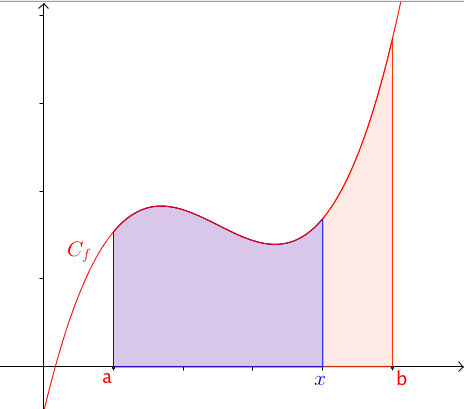
On a par exemple :

En effet, la courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l’origine du repère, donc :

Et donc :

**Partie 2 : Intégrale et primitive**

1) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit une fonction continue sur

un intervalle .

La fonction définie sur par :

est la primitive de qui

s’annule en .

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6DHXw5TRzN4**](https://youtu.be/6DHXw5TRzN4)

Soit la fonction définie sur [0 ; 10] par : .

a) Étudier les variations de *.*

b) Tracer sa courbe représentative.

**Correction**

a) est continue et positive sur [0 ; 10] donc est dérivable sur [0 ; 10] et .

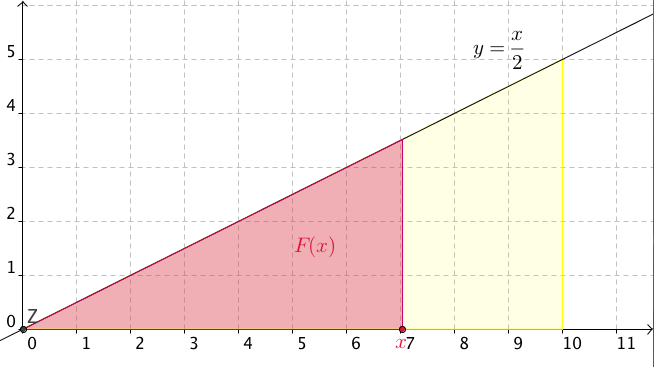
Donc est croissante sur [0 ; 10].

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 10 |
|  |  |
|  | 25  0 |

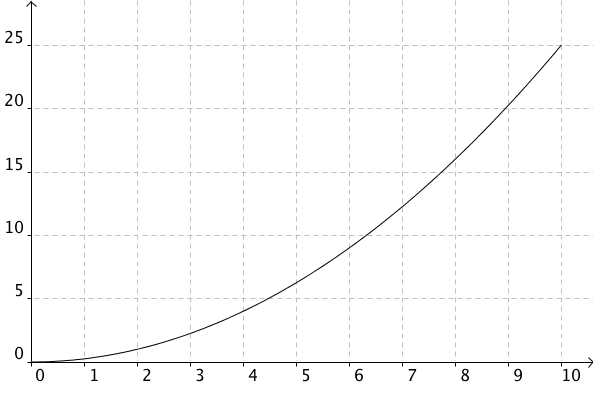
est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi



b) Pour tout de [0 ; 10], on a

On a ainsi la représentation graphique de :



2) Calcul d’intégrales

Propriété : Soit une fonction continue sur un intervalle .

Si est une primitive de alors :

Définition : Soit une fonction continue sur un intervalle I, et deux réels de I et une primitive de sur .

On appelle **intégrale** de sur la différence .

Notation :

Rappels de la classe de 1ère : Primitives des fonctions usuelles

|  |  |
| --- | --- |
| Fonction | Primitive |
| , |  |
| , |  |
|  |  |
|  |  |

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8ci1RrNH1L0**](https://youtu.be/8ci1RrNH1L0)

Calculer les intégrales suivantes :

**Correction**

On a :

Une primitive de est la fonction telle que :

Donc :

On a :

Une primitive de est la fonction telle que :

Donc :

On a :

Une primitive de est la fonction telle que :

Donc :

3) Propriété de linéarité

Propriété :

a) Pour réel,

b)

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/B9n\_AArwjKw**](https://youtu.be/B9n_AArwjKw)

On pose : et

a) Calculer et .

On donne : et

b) En déduire et .

**Correction**

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

b) On a ainsi :

donc soit :

2) Positivité et comparaison

Propriétés :

a) Si, pour tout de , , alors

b) Si, pour tout de , , alors

Méthode : Encadrer une intégrale

Démontrer que :

**Correction**

Sur [0 ; 1], on a : . On déduit que :

D'où :



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)