CALCUL INTÉGRAL – Chapitre 2/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/pFKzXZrMVxs

Partie 1 : Positivité et comparaison

Propriétés :

a) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Méthode : Encadrer une intégrale

Vidéo https://youtu.be/VK0PvzWBIso

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.

Correction

a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$.
Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$$

$$\int_0^1 0\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e-1$$

D'où : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.

Partie 2 : Aire délimitée par deux courbes

Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

Vidéo https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ

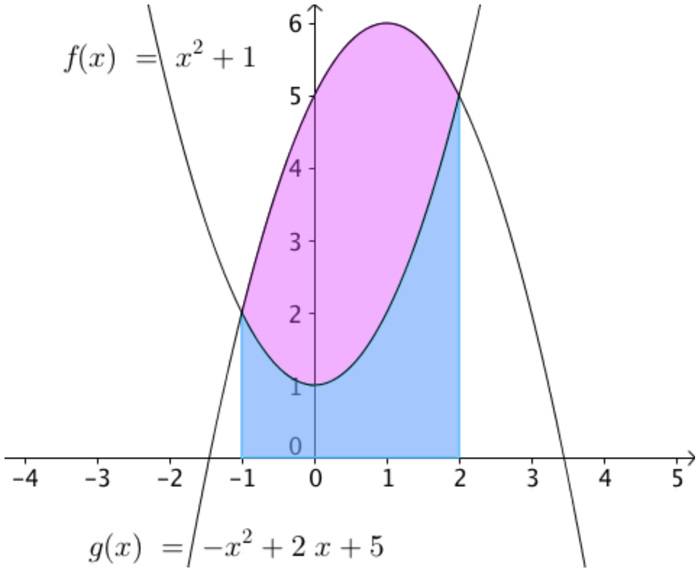
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admet que pour tout x de $[-1\,;2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

Correction

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f.

Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$



$$\begin{aligned} I_g &= \int_{-1}^{2} g(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_{-1}^{2} \\ &= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1)\right) \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_f &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} x^2 + 1\ dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Donc : $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9\ u.a.$

<u>Remarque :</u> Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

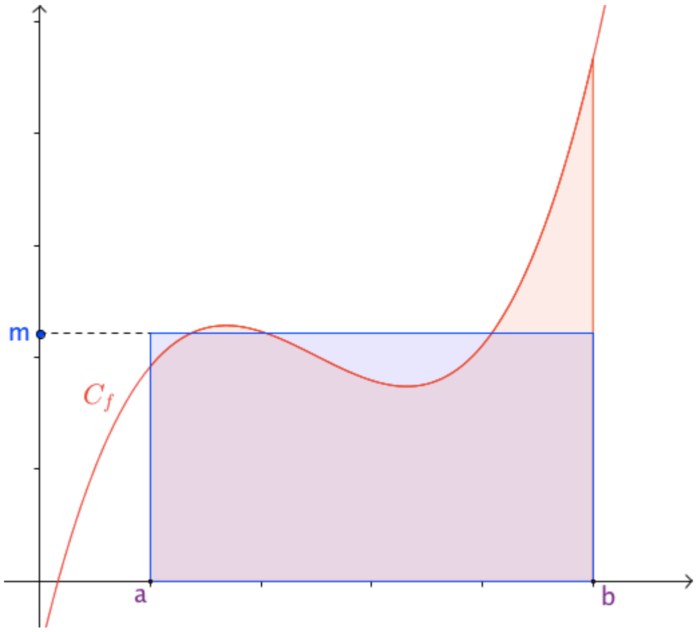
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5\,dx - \int_{-1}^{2} x^2 + 1\ dx \\ &= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\ dx = \cdots = 9 \end{aligned}$$

Partie 3 : Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \neq b$.
On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Interprétation géométrique :
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu), entre a et b.



Exemple :
Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [1 ; 10].

$$m = \frac{1}{10-1}\int_1^{10} 3x^2 - 4x + 5\,dx$$
$$= \frac{1}{9}[x^3 - 2x^2 + 5x]_1^{10}$$
$$= \frac{1}{9}\left((10^3 - 2 \times 10^2 + 5 \times 10) - (1^3 - 2 \times 1^2 + 5 \times 1)\right) = \frac{1}{9}(850 - 4) = \frac{846}{9} = 94$$

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/oVFHojz5y50

On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Correction

$$m = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^{16} 16x^2 - x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16}$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4\right)$$
$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.