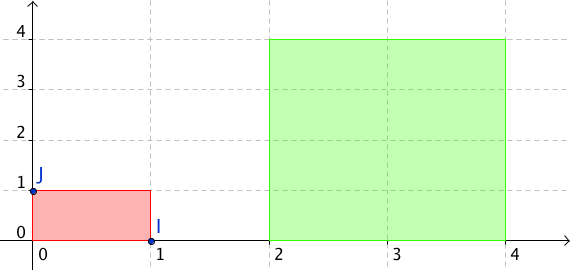
CALCUL INTÉGRAL – Chapitre 1/2

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/pFKzXZrMVxs**](https://youtu.be/pFKzXZrMVxs)



En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l’équation de la courbe pour calculer l’aire sous la courbe, c’est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).

Au milieu du XIXe siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l’idée qu’une personne s’intègre à un groupe.

**Partie 1 : Intégrale et aire**

1. Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1.

Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

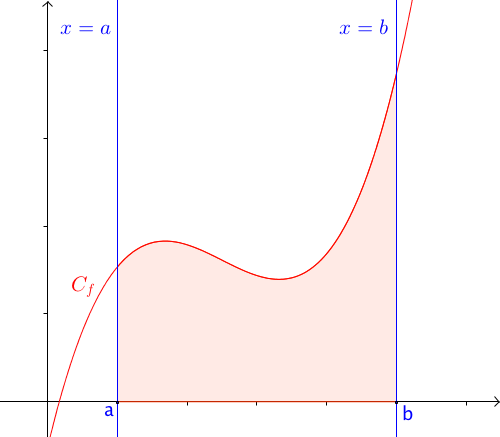
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit une fonction continue et positive sur un intervalle .

On appelle **intégrale** de sur l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la

fonction , l'axe des abscisses et les

droites d'équations et .

Intégrale de sur

3) Notation

L'intégrale de la fonction sur se note :

Et on lit « intégrale de à de ».

Remarques :

- et sont appelés les **bornes d'intégration**.

- est la **variable d’intégration**. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : .

"" ou "" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

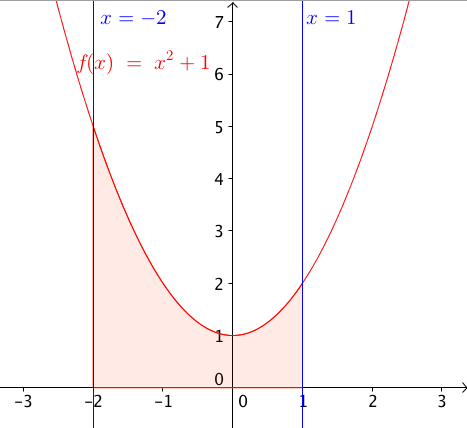


Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme **s**omme infinie d'autres aires.

Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction définie par , l'axe des abscisses et les droites d'équations et est l'intégrale de la fonction sur l'intervalle et se note :



Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/jkxNKkmEXZA**](https://youtu.be/jkxNKkmEXZA)

a) Tracer la représentation graphique de la fonction définie par dans un repère orthonormé.

b) Calculer .

**Correction**

a)

Une image contenant graphique

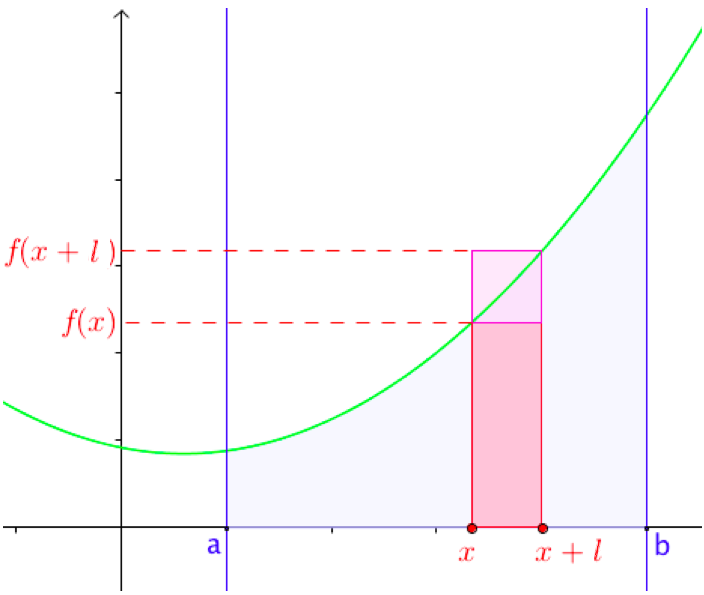
Description générée automatiquement

b) Calculer revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction , l'axe des abscisses et les droites d'équations et

.

Donc par dénombrement, on obtient :

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction continue, positive et monotone sur un intervalle .

On partage l'intervalle en sous-intervalles de même amplitude .

Sur un sous-intervalle , l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

* l'un de dimension et qui a pour aire :

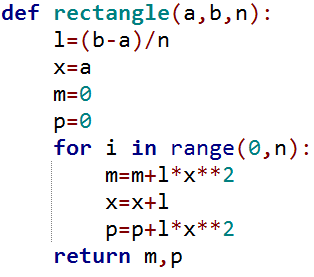
;

* l'autre de dimension et qui a pour aire .

Sur l'intervalle , l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des rectangles "inférieurs" et la somme des rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement :

|  |
| --- |
| **Langage naturel** |
| Définir fonction rectangle(a, b, n)  L ← (b-a)/n  *x* ← a  m ← 0  p ← 0  Pour i allant de 0 à n-1  m ← m+Lxf(*x*)  *x* ← *x*+L  p ← p+Lxf(*x*)  FinPour  Afficher m et p |

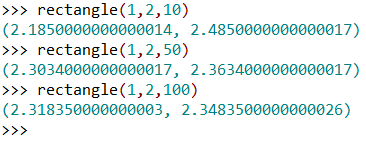


Exemple :

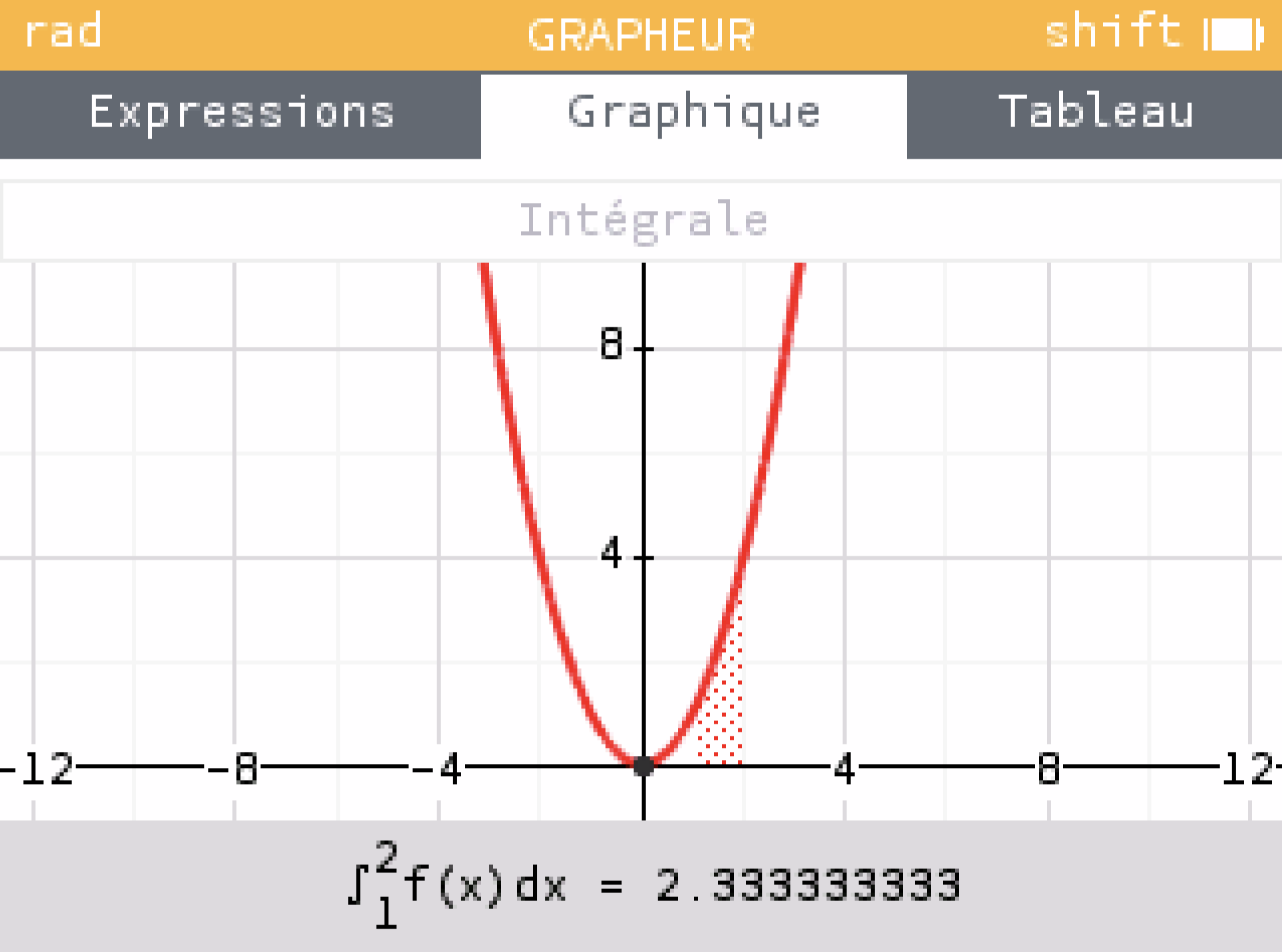
Avec Python, on programme cet algorithme pour la fonction sur l’intervalle [1 ; 2].

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur [1 ; 2].

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.



On en déduit que :

****

Il est possible de vérifier avec la calculatrice :

**Calculer une intégrale avec la calculatrice :**

 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/0Y3VT73yvVY**](https://youtu.be/0Y3VT73yvVY)

 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/hHxmizmbY\_k**](https://youtu.be/hHxmizmbY_k)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo**](https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo)

5) Extension aux fonctions de signe quelconque

Propriété : Soit une fonction continue et NÉGATIVE sur un intervalle .

L'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par :

Une image contenant diagramme, ligne, Tracé

Description générée automatiquement - la courbe représentative de la fonction ,

- l'axe des abscisses,

- et les droites d'équations et

est égale à :

Propriétés sur les bornes d’intégration :

Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/l2zuaZukc0g**](https://youtu.be/l2zuaZukc0g)

Représenter la droite d’équation dans un repère.

En déduire en effectuant des calculs d’aire.

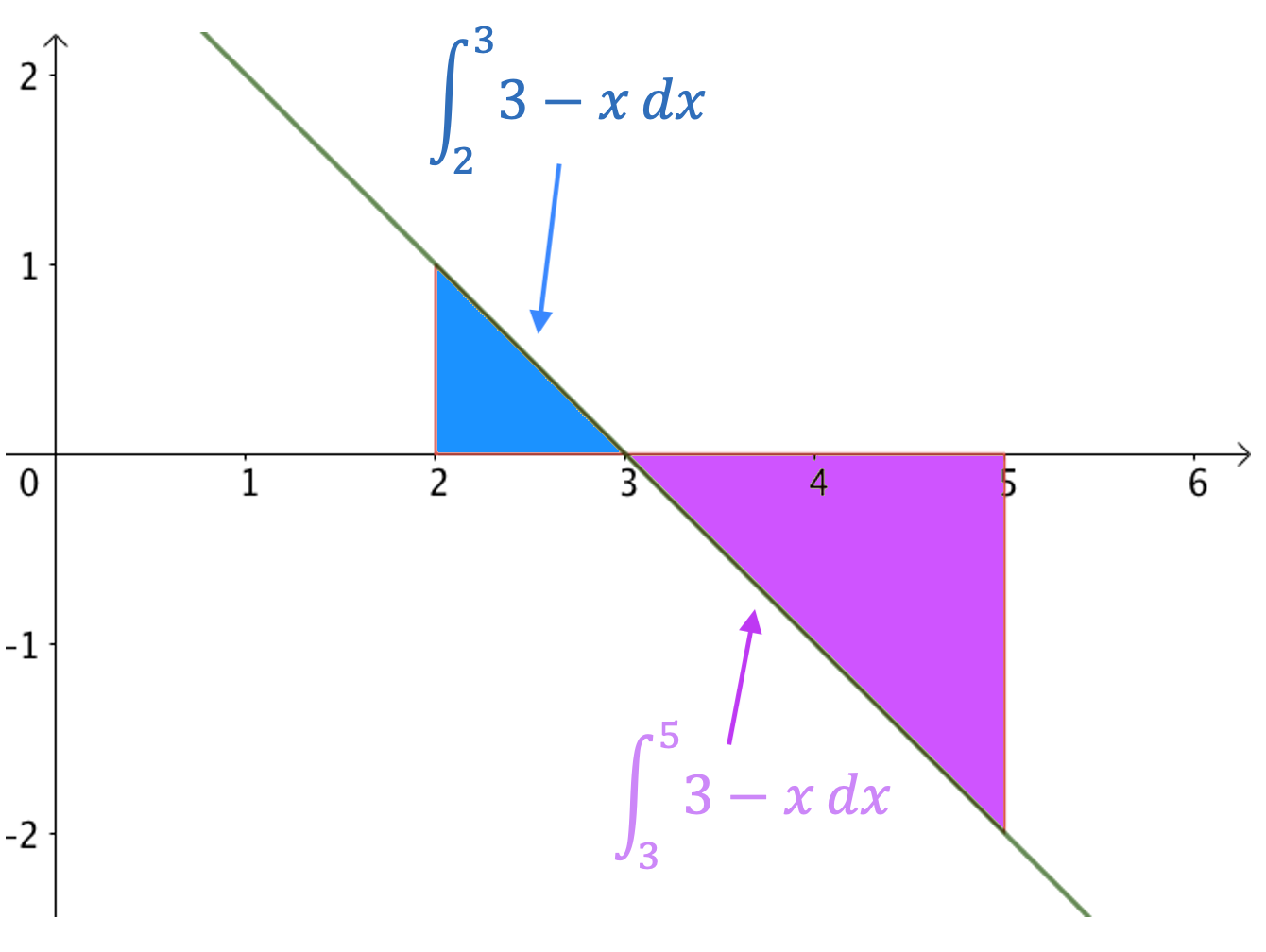
**Correction**

La droite d’équation coupe l’axe des abscisses en .

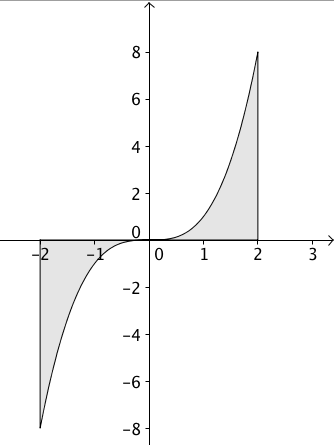
Donc, sur l’intervalle

Et, sur l’intervalle .

D’après la relation de Chasles, on a :



Donc :



Remarque :

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

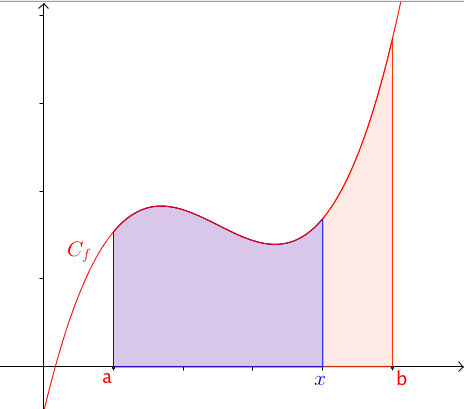
On a par exemple :

En effet, la courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l’origine du repère, donc :

Et donc :

**Partie 2 : Intégrale et primitive**

1) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit une fonction continue sur

un intervalle .

La fonction définie sur par :

est la primitive de qui

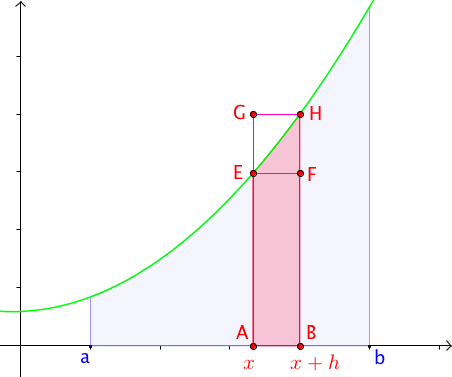
s’annule en .

Démonstration au programme dans le cas où est strictement croissante :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/p2W6FYBxTlo**](https://youtu.be/p2W6FYBxTlo)

- 1er cas :

On considère deux réels et de l'intervalle .

On veut démontrer que : soit : .

On a représenté ci-contre, la courbe de la

fonction *f* (en vert).

Cette différence est égale à l'aire de la surface

colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles

ABFE et ABHG.

Or, et

.

Comme est croissante sur , on a :

Puisque , on a :

Comme est continue sur , .

D'après le théorème des gendarmes, .

Et donc :

est donc une primitive de .

Par ailleurs, s’annule en car

- 2e cas :

La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

Conséquence immédiate :

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6DHXw5TRzN4**](https://youtu.be/6DHXw5TRzN4)

Soit la fonction définie sur [0 ; 10] par : .

a) Étudier les variations de *.*

b) Tracer sa courbe représentative.

**Correction**

a) est continue et positive sur [0 ; 10] donc est dérivable sur [0 ; 10] et .

Donc est croissante sur [0 ; 10].

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 10 |
|  |  |
|  | 25  0 |

est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi

Une image contenant texte, ligne, Tracé, diagramme

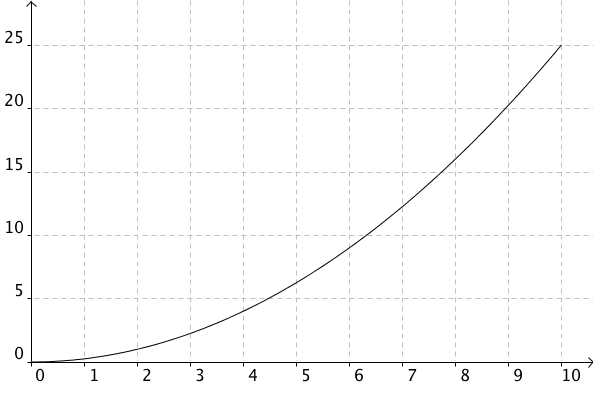
Description générée automatiquement

b) Pour tout de [0 ; 10], on a

Une image contenant ligne, Tracé, diagramme, pente

Description générée automatiquement

On a ainsi la représentation graphique de :



2) Calcul d’intégrales

Propriété : Soit une fonction continue sur un intervalle .

Si est une primitive de alors :

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/S3reCPS4dq4**](https://youtu.be/S3reCPS4dq4)

La fonction définie sur par est une primitive de sur d’après le premier théorème du paragraphe II.

Si est une primitive de alors pour tout de [*a* ; *b*], on a : .

En effet, deux primitives d’une même fonction diffèrent d’une constante.

De plus, et donc et donc :

.

Or .

Définition : Soit une fonction continue sur un intervalle I, et deux réels de I et une primitive de sur .

On appelle **intégrale** de sur la différence .

Notation :

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw**](https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8ci1RrNH1L0**](https://youtu.be/8ci1RrNH1L0)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/uVMRZSmYcQE**](https://youtu.be/uVMRZSmYcQE)

Calculer les intégrales suivantes :

**Correction**

On a :

Une primitive de est la fonction telle que :

Donc :

On a :

Une primitive de est la fonction telle que :

Donc :

**Partie 3 : Propriétés des intégrales**

1) Propriété de linéarité

Propriété :

a) Pour réel,

b)

Éléments de démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- est une primitive de

- est une primitive de

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/B9n\_AArwjKw**](https://youtu.be/B9n_AArwjKw)

On pose : et

a) Calculer et .

On donne : et

b) En déduire et .

**Correction**

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

b) On a ainsi :

donc soit :

2) Positivité et comparaison

Propriétés :

a) Si, pour tout de , , alors

b) Si, pour tout de , , alors

Démonstration :

a) Par définition, lorsque est positive, l'intégrale de est une aire donc est positive.

b) Si alors .

Donc en appliquant a), on a : .

Par linéarité, on a et donc .

Méthode : Encadrer une intégrale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/VK0PvzWBIso**](https://youtu.be/VK0PvzWBIso)

a) Démontrer que pour tout de [0 ; 1], on a : .

b) En déduire que : .

**Correction**

a) Sur [0 ; 1], .

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur , on a : .

b) On déduit de la question précédente que :

D'où : .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)