LOI DES GRANDS NOMBRES – Chapitre 2/2

 **Le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/\_ZzxgjAxrt4**](https://youtu.be/_ZzxgjAxrt4)

**Partie 1 : Moyenne d’un échantillon**

1) Définition

Exemple :

On lance un dé à six faces et on considère la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le dé s’arrête sur un chiffre pair et la valeur 0 sinon.

suit donc une loi de Bernoulli de paramètre .

On répète deux fois de suite cette expérience. On considère alors l’échantillon de taille 2 de variables aléatoires et suivant la même loi que .

Il est ainsi possible d’évaluer le résultat d’une telle expérience en étudiant la variable aléatoire moyenne de et

On appelle la variable aléatoire moyenne de l’échantillon

Alors peut prendre les valeurs suivantes :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valeur de | Probabilité de | Valeur de | Probabilité de | Probabilité de | Valeur de | Probabilité de |
| 0 |  | 0 |  |  |  |  |
| 0 |  | 1 |  |  |  |  |
| 1 |  | 0 |  |  |  |
| 1 |  | 1 |  |  |  |  |

Et on a ainsi la loi de probabilité de  :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Définition : Soit un échantillon de taille de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

**La variable aléatoire moyenne** de l’échantillon est donnée par :

2) Propriétés

Exemple :

On reprend l’exemple précédent.

- Calculons l’espérance de  :

On retrouve l’espérance de la variable .

On comprend intuitivement que l’espérance de la variable aléatoire moyenne d’un échantillon est égale à l’espérance de la variable aléatoire associée à cet échantillon.

- Calculons la variance de  :

Alors que :

Ainsi la variance de la variable aléatoire moyenne est plus faible que la variance de la variable d’origine.

De plus, la dispersion de la variable aléatoire moyenne diminue au fur et à mesure que la taille de l’échantillon augmente.

En effet, si l’échantillon devient plus grand, le nombre de situations pouvant donner des valeurs proches de l’espérance augmente.

Ainsi, les valeurs prises par la moyenne deviennent de plus en plus probables dans un voisinage de l’espérance.

Propriété : Soit une variable aléatoire et soit un échantillon de taille de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que .

Méthode : Calculer l’espérance, la variance et l’écart-type d’une variable aléatoire moyenne

 **Vidéo** [**https://youtu.be/o67OOavrbHQ**](https://youtu.be/o67OOavrbHQ)

On considère la variable aléatoire qui prend, de façon équiprobable, les valeurs –4, 0, 1, 3 et 6.

est la variable aléatoire moyenne d’un échantillon de taille 50 de la loi de .

Calculer l’espérance, la variance et l’écart type de .

**Correction**

Par équiprobabilité, on établit le tableau de la loi de probabilité de .

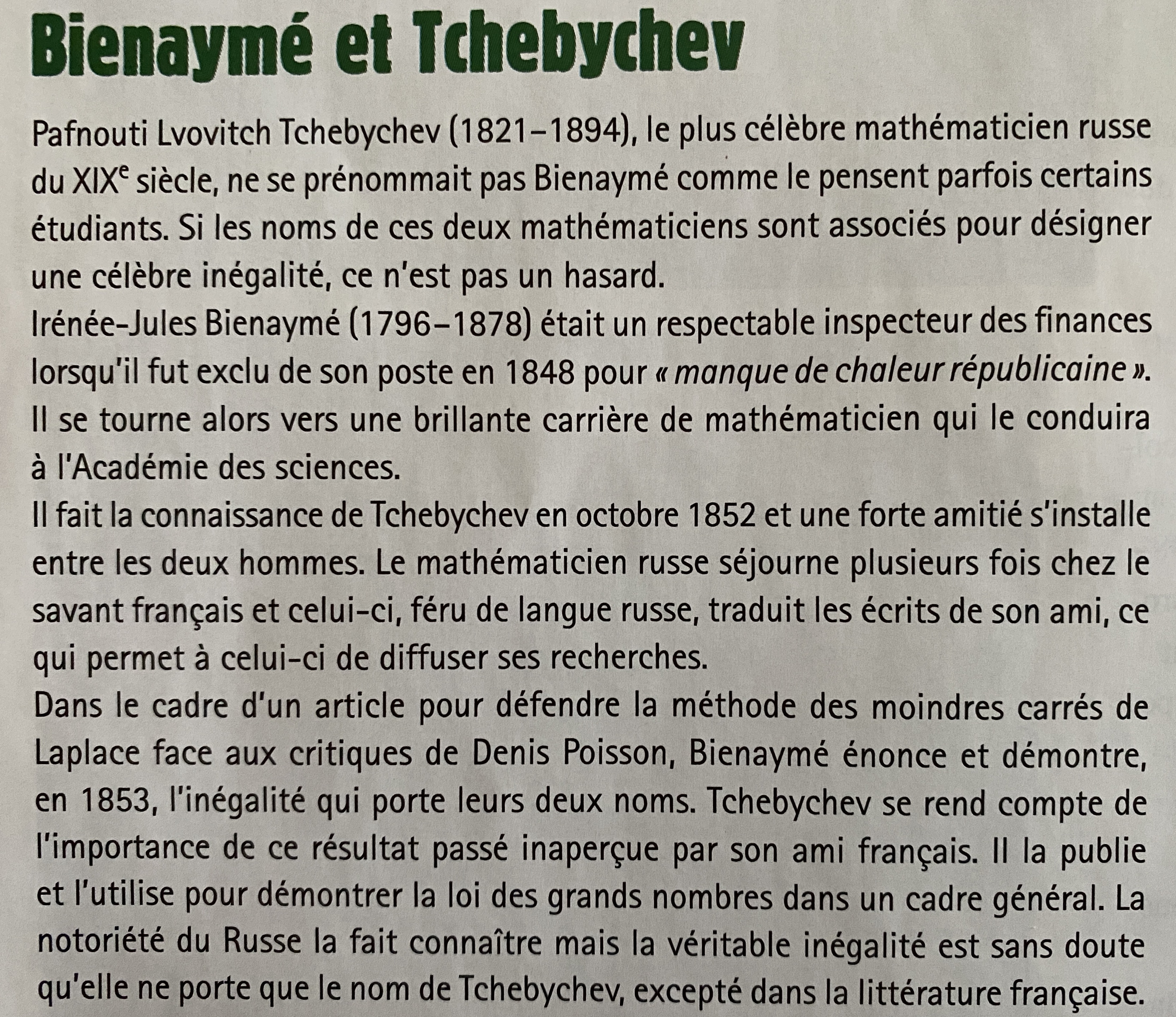
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | –4 | 0 | 1 | 3 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |

On a ainsi :

On en déduit :

**Partie 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Propriété : Soit une variable aléatoire . Pour tout réel strictement positif , on a :

 *Tangente n°197 - Décembre 2020*

Méthode : Appliquer l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev

 **Vidéo** [**https://youtu.be/4XMvq1FnYwU**](https://youtu.be/4XMvq1FnYwU)

Soit une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres et .

1) Appliquer l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec Interpréter.

2) Recommencer avec , puis . Que constate-t-on ?

3) a) Simuler valeurs de la variable aléatoire par une fonction en Python dans le but d’estimer la probabilité .

On testera le programme pour différentes valeurs de .

b) Au regard des résultats obtenus par le programme, peut-on penser que l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev a un caractère optimal ?

**Correction**

1)

Ainsi, on obtient :

Ou encore :

La probabilité que l’écart de à soit supérieur à est majorée par 0,25.

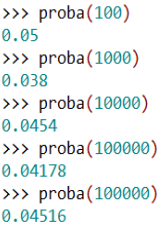
2) ● pour  :

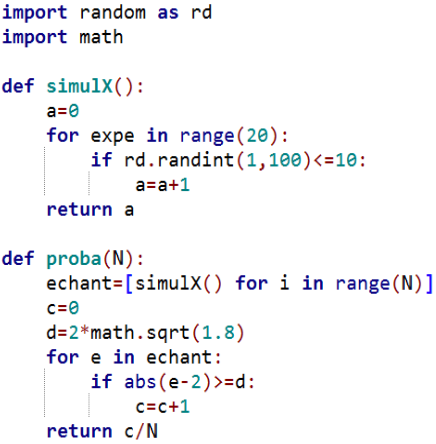
Ou encore :

● pour  :

Ou encore :

● On peut en déduire que les écarts de à de quelques deviennent improbables.



3) a)

b) On constate qu’un écart à supérieur à est de probabilité souvent inférieure 0,05 (0,038 ; 0,0454 ; 0,04178 ; 0,04516) alors que l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne pour cette même probabilité une majoration par 0,25. L’inégalité est donc loin d’être optimale.

**Partie 3 : Inégalité de concentration**

Propriété : Soit la variable aléatoire moyenne d’un échantillon de taille de la variable aléatoire . Pour tout réel strictement positif , on a :

Méthode : Appliquer l’inégalité de concentration pour déterminer la taille d’un échantillon

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7Nk9U-zwWOA**](https://youtu.be/7Nk9U-zwWOA)

Soit une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.

On considère un échantillon de variables aléatoires suivant la loi de .

On appelle la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.

Déterminer la taille de l’échantillon tel que la probabilité que la moyenne appartienne à l’intervalle soit supérieure à 0,95.

**Correction**

On cherche à calculer tel que

Dans l’idée d’appliquer l’inégalité de concentration, on fait apparaitre l’espérance de dans l’inégalité.

Or,

Ainsi, on cherche tel que :

Soit :

Soit encore :

Et donc, en considérant l’évènement contraire :

En prenant dans l’inégalité de concentration, on a :

, avec .

Or,

On cherche donc un entier tel que :

Et donc :

Pour , la probabilité que la moyenne appartienne à l’intervalle est supérieure à 0,95.

**Partie 4 : Loi des grands nombres**

Propriété : Soit la variable aléatoire moyenne d’un échantillon de taille de la variable aléatoire . Pour tout réel strictement positif , on a :

Remarque : La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l’échantillon d’une variable aléatoire est grande, plus l’écart entre la moyenne de cet échantillon et l’espérance de la variable aléatoire est faible.

Méthode : Appliquer la loi des grands nombres

 **Vidéo** [**https://youtu.be/fzuNxQSDTb8**](https://youtu.be/fzuNxQSDTb8)

Soit une variable aléatoire d’espérance 3 et de variance 0,2.

Soit la variable aléatoire moyenne d’un échantillon de taille de la variable aléatoire .

1) Déterminer un majorant de pour , pour , puis pour 0. Que constate-t-on ?

2) Démontrer et interpréter le résultat précédent.

**Correction**

1) D’après l’inégalité de concentration, on a :

Soit, dans le contexte de l’exercice :

● Pour on a :

● Pour on a :

● Pour on a :

On constate que plus augmente, plus le majorant de la probabilité se rapproche de 0.

2) D’après la loi des grands nombres, on a :

Soit, dans le contexte de l’exercice :

Plus la taille de l’échantillon est grande, plus l’écart entre la moyenne et l’espérance est faible.

Méthode : Simuler des valeurs d’une variable aléatoire moyenne dans le but d’observer la loi des grands nombres

On considère la variable aléatoire qui prend ses valeurs de manière équiprobable parmi les entiers 1 à 5.

Et on nomme la variable aléatoire moyenne d’un échantillon de taille de la variable aléatoire .

a) Simuler 500 valeurs de la variable aléatoire par une fonction en Python dans le but d’estimer la probabilité .

Tester le programme pour différentes valeurs de et des valeurs de de plus en plus grande.

b) Que constate-t-on ?

c) Justifier et interpréter ce résultat.

**Correction**

a) Comme il y a équiprobabilité et cinq issues possibles, toutes les probabilités des valeurs prises par sont égale à .

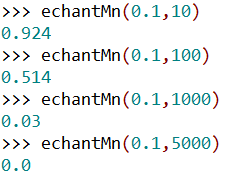
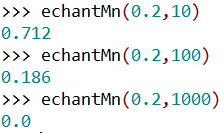
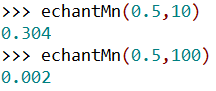
On a ainsi :

Et donc : .

Programme permettant de simuler 500 valeurs de la variable aléatoire dans le but d’estimer la probabilité  :

Une image contenant texte, capture d’écran, Police, ligne

Description générée automatiquement Affichages en sortie :



b) On constate que, dans tous les cas, plus augmente, plus la probabilité

 se rapproche de 0.

c) D’après la loi des grands nombres, on a :

Soit, dans le contexte de l’exercice :

Plus la taille de l’échantillon est grande, plus l’écart entre la moyenne de cet échantillon et l’espérance de la variable aléatoire est faible.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)