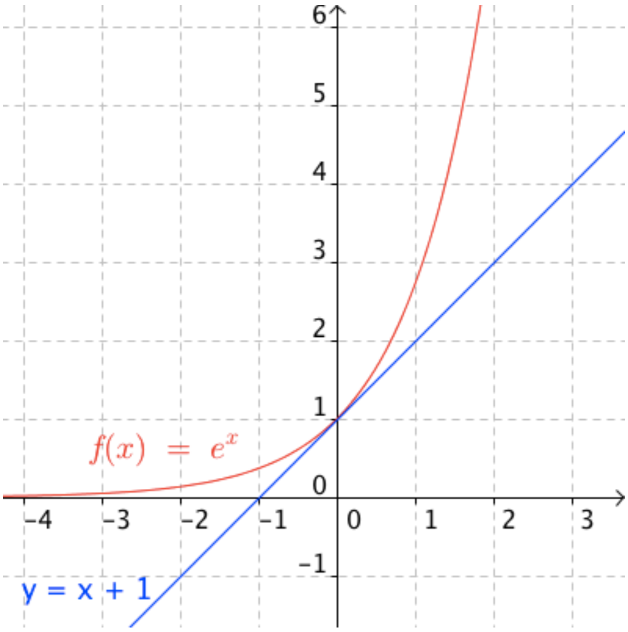
FONCTION EXPONENTIELLE

Partie 1 : Définition de la fonction exponentielle de base e

1) Définition

Propriété : Parmi toutes les fonctions $x \longmapsto a^x$, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point (0 ; 1) a pour coefficient directeur 1.



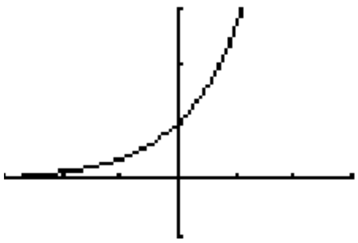
Définition : Cette fonction est la **fonction exponentielle de base e**, notée **exp**, telle que pour tout réel x, on a : exp : $x \longmapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarques : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

e^1

2.718281828

Il est également possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi e^7 dépasse 1 000, e^{14} dépasse le million et e^{21} dépasse le milliard.

Valeurs particulières à connaître : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

Partie 2 : Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

2) Limites aux bornes

- On a constaté précédemment que la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ renvoie des valeurs de plus en plus grandes pourvu que x devienne de plus en plus grand.
On dit dans ce cas, que la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
Et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

- On cherche à conjecturer de même la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.
Calculons quelques valeurs de la fonction exponentielle pour des valeurs de x de plus en plus grandes dans les négatifs.
$e^{-5} \approx 0{,}006\,7$, $e^{-20} \approx 2{,}061 \times 10^{-9}$, $e^{-100} \approx 3{,}72 \times 10^{-44}$
On constate que la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus proches de 0 pourvu que x devienne de plus en plus grand dans les négatifs.
On dit dans ce cas, que la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ est égale à 0.
Et on note : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Propriétés :
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3) Variations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, $(e^x)' > 0$ car $(e^x)' = e^x > 0$.

Méthode : Dériver une fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/XcMePHk6Ilk

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 3e^x$ b) $g(x) = (x-1)e^x$ c) $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

Correction

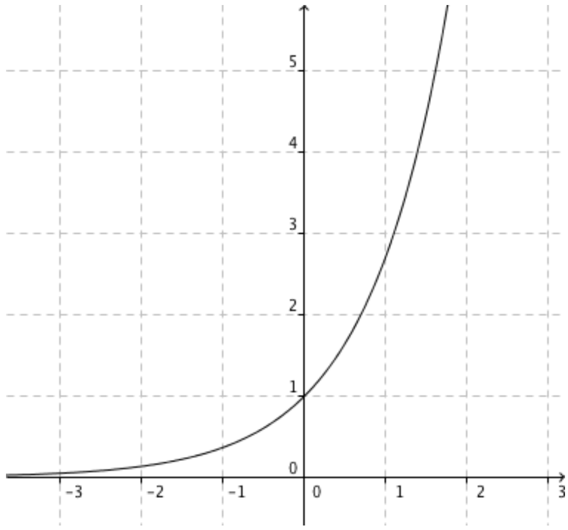
a) $f'(x) = 4 - 3e^x$ b) $g'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

c) $h'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

3) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	$+$	
e^x	0 ↗	$+\infty$



Partie 3 : Propriété de la fonction exponentielle

Comme π, le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.
Ses premières décimales sont :
$e \approx$ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…
Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.
Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit « algébrique ».
Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentielle.
Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Rappelons que par exemple 5! se lit "factorielle 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.
Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.
Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

Propriétés : Pour tous réels x et y, on a :

$e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Méthode : Simplifier les écritures

Vidéo https://youtu.be/qDFjeFyA_OY

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\quad B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$ $\quad C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$ $\quad D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

Correction

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \frac{e^3}{e^{-5}} = e^{3-(-5)} = e^8$$

$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} = e^{5\times(-6)} \times e^{-3} = e^{-30} \times e^{-3} = e^{-30-3} = e^{-33}$$

$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-3\times 2}} + \frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$$

$$D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} = \frac{e^{2x\times 3}}{e^{3x+1-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{6x-2x} = e^{4x}$$

Propriétés : Pour tous réels a et b, on a :
a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x^2} = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x^2} = 0$
$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x^2}$
$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x^2 - 3 = 0$
$\Leftrightarrow 3x^2 = 3$
$\Leftrightarrow x^2 = 1$
Donc $x = -1$ ou $x = 1$.
$S = \{-1\,;1\}$.

b) $e^{4x-1} \geq 1$
$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$
$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{4}$

$S = \left[\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/_MA1aW8ldjo

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

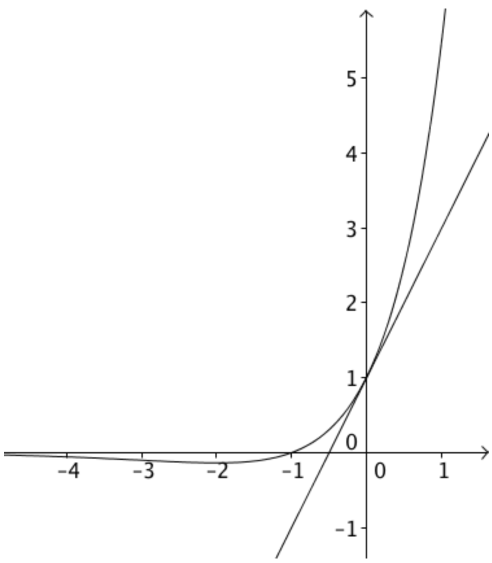
Correction
a) $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$
b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.
f' est donc négative sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -2]$ et positive sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$.
f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$		↘	$-e^{-2}$	↗	

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit : $y = 2x + 1$

d)



Partie 4 : Fonctions de la forme $x \longmapsto e^{kx}$

1) Variations

Propriété : La fonction $x \longmapsto e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $x \longmapsto ke^{kx}$.

Démonstration :
On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $x \longmapsto f(ax+b)$ est $x \longmapsto af'(ax+b)$.
En considérant $f(x) = e^x$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kx})' = ke^{kx}$.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/RlyFEcx5Y3E

Soit $f(x) = e^{-4x}$ alors $f'(x) = -4e^{-4x}$.

Propriété :
Si $k > 0$: la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est croissante.
Si $k < 0$: la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est décroissante.

Démonstration :
On a : $(e^{kx})' = ke^{kx}$
Or, $e^{kx} > 0$ pour tout réel x et tout réel k.
Donc le signe de la dérivée $x \longmapsto ke^{kx}$ dépend du signe de k.
Si $k > 0$ alors la dérivée est positive est donc la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est croissante.
Si $k < 0$ alors la dérivée est négative est donc la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est décroissante.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction composée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-3x}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) En déduire les variations de la fonction f.

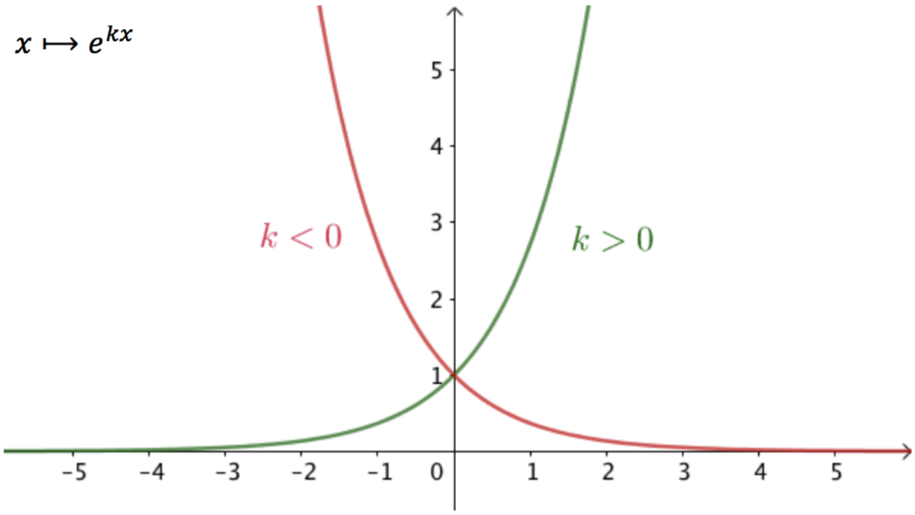
Correction
a) On a :
$f'(x) = e^{-3x} + x \times (-3)e^{-3x} = (1-3x)e^{-3x}$
En effet : $(e^{-3x})' = (-3)e^{-3x}$

b) Comme $e^{-3x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-3x$.
$1 - 3x \geq 0$ pour $1 \geq 3x$ soit $x \leq \frac{1}{3}$.
f'est donc positive sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.
f est donc croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

2) Limites

Propriétés :
Si $k > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$
Si $k < 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = +\infty$

3) Représentation graphique



Méthode : Étudier une fonction $x \longmapsto e^{kx}$ dans une situation concrète

Vidéo https://youtu.be/lsLQwiB9Nrg

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] et telle que $f'(t) = 0{,}14f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0) = 50\,000$. Déterminer A.
3) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

Correction
1) $f'(t) = A \times 0{,}14e^{0{,}14t} = 0{,}14 \times Ae^{0{,}14t} = 0{,}14f(t)$.
La fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ vérifient bien l'égalité $f'(t) = 0{,}14f(t)$ donc elle convient.

2) $f(0) = Ae^{0{,}14 \times 0} = Ae^{0} = A$.
Donc, si $f(0) = 50\,000$, on a : $A = 50\,000$.
Une expression de la fonction f est donc : $f(t) = 50\,000\, e^{0{,}14t}$.

3) Comme $k = 0{,}14 > 0$, on en déduit que la fonction $x \longmapsto e^{0{,}14t}$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction f.

4) a) $f(3) = 50\ 000\ e^{0{,}14\times 3} = 50\ 000\ e^{0{,}42} \approx 76\ 000$
$f(5{,}5) = 50\ 000\ e^{0{,}14\times 5{,}5} = 50\ 000\ e^{0{,}77} \approx 108\ 000$

Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.
Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

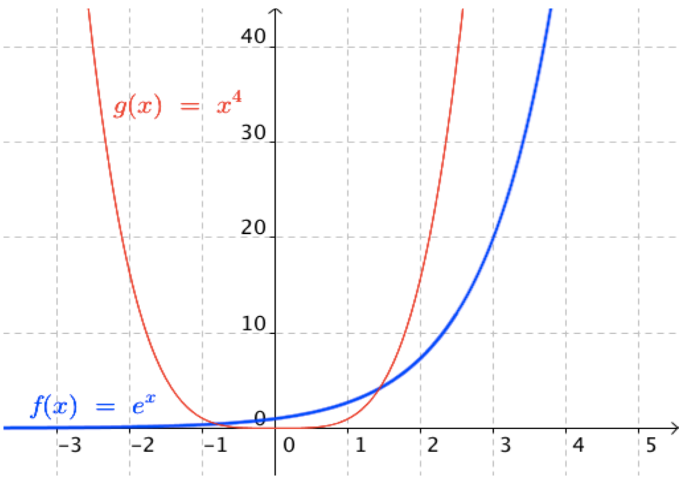
Partie 5 : Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Propriétés (croissances comparées) :

Pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$

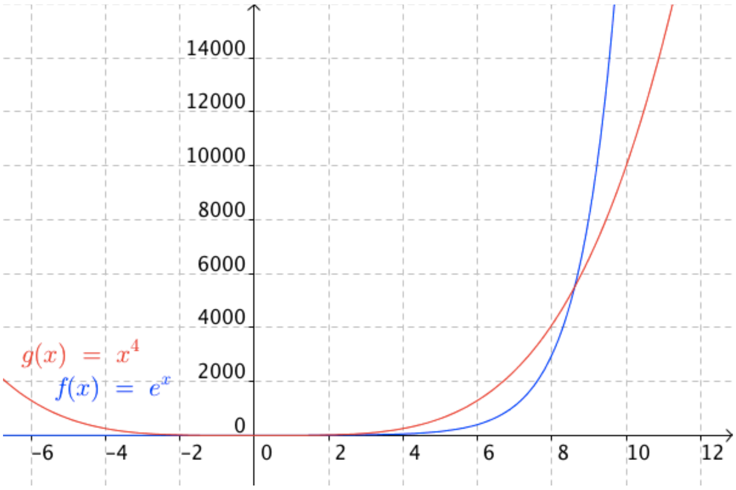
Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Exemple : Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction $x \longmapsto x^4$ dans différentes fenêtres graphiques.



Dans cette première fenêtre, on pourrait croire que la fonction puissance à une croissance plus rapide que la fonction exponentielle.

Mais en élargissant la fenêtre graphique, on constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction $x \longmapsto x^4$.



Méthode : Calculer une limite par croissance comparée

Vidéo https://youtu.be/LARFj4z8aok

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}}$

Correction

a) Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

b) On a : $\frac{x^3}{e^x} = x^3e^{-x}$ et par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$.

c) Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$

De plus, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$ comme fonction inverse d'une fonction qui tend vers $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}} = 0 + 0 = 0$ comme somme de fonctions qui tendent vers 0.