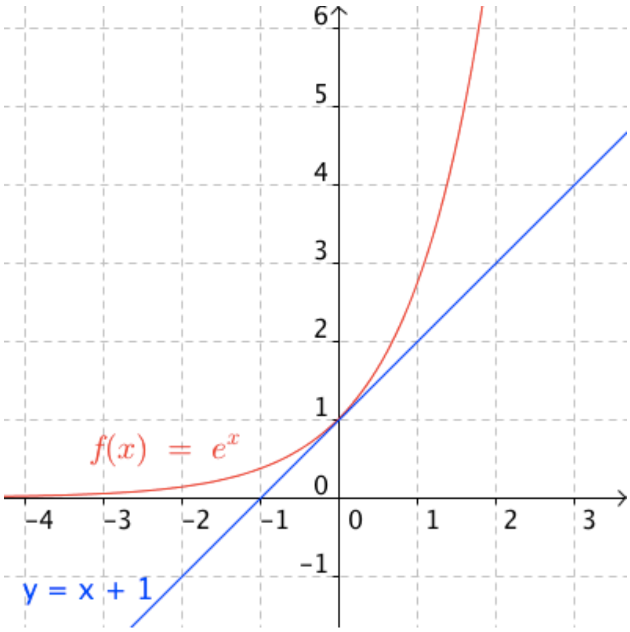
FONCTION EXPONENTIELLE

I. Définition de la fonction exponentielle de base e

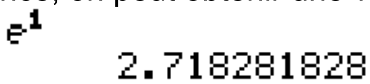
1) Définition

Propriété : Parmi toutes les fonctions $x \longmapsto a^x$, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point (0 ; 1) a pour coefficient directeur 1.

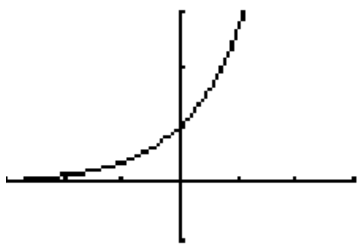


Définition : Cette fonction est la **fonction exponentielle de base e**, notée $\exp$, telle que pour tout réel x, on a : $\exp : x \longmapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarques : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.



Il est également possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi e^7 dépasse 1000, e^{14} dépasse le million et e^{21} dépasse le milliard.

Valeurs particulières à connaître : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

II. Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

2) Limites aux bornes

- On a constaté précédemment que la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ renvoie des valeurs de plus en plus grandes pourvu que x devienne de plus en plus grand.
On dit dans ce cas, que la limite de x en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
Et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

- On cherche à conjecturer de même la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.
Calculons quelques valeurs de la fonction exponentielle pour des valeurs de x de plus en plus grandes dans les négatifs.
$e^{-5} \approx 0{,}0067$, $e^{-20} \approx 2{,}061 \times 10^{-9}$, $e^{-100} \approx 3{,}72 \times 10^{-44}$
On constate que la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus proches de 0 pourvu que x devienne de plus en plus grand dans les négatifs.
On dit dans ce cas, que la limite de x en $-\infty$ est égale à 0.
Et on note : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Propriétés :
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3) Variations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, $(e^x)' > 0$ car $(e^x)' = e^x > 0$.

Méthode : Dériver une fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/XcMePHk6llk

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 3e^x$ b) $g(x) = (x-1)e^x$ c) $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

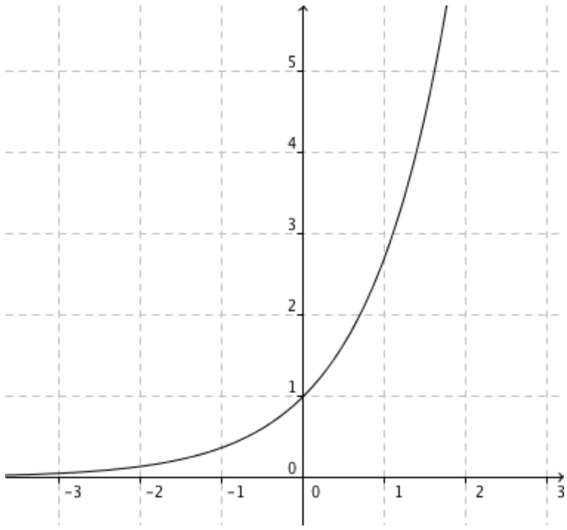
a) $f'(x) = 4 - 3e^x$ b) $g'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

c) $h'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

3) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	$+$	
e^x	0 ↗	$+\infty$



III. Propriété de la fonction exponentielle

Comme π, le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont :
$e \approx$ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…
Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.
Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit « algébrique ».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentielle.

Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :
$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$
Rappelons que par exemple 5! se lit "factorielle 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5.
Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.
Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

Propriétés : Pour tous réels x et y, on a :

$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Méthode : Simplifier les écritures

Vidéo https://youtu.be/qDFjeFyA_OY

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\quad B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$ $\quad C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$ $\quad D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \frac{e^3}{e^{-5}} = e^{3-(-5)} = e^8$$

$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} = e^{5\times(-6)} \times e^{-3} = e^{-30} \times e^{-3} = e^{-30-3} = e^{-33}$$

$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-3\times 2}} + \frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$$

$$D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} = \frac{e^{2x\times 3}}{e^{3x+1-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{6x-2x} = e^{4x}$$

Propriétés : Pour tous réels a et b, on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x^2} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x^2} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

Donc $x = -1$ ou $x = 1$.

$S = \{-1\,;1\}$.

b) $e^{4x-1} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$

$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{4}$

$S = \left[\frac{1}{4} ; +\infty\right[$

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/_MA1aW8ldjo

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

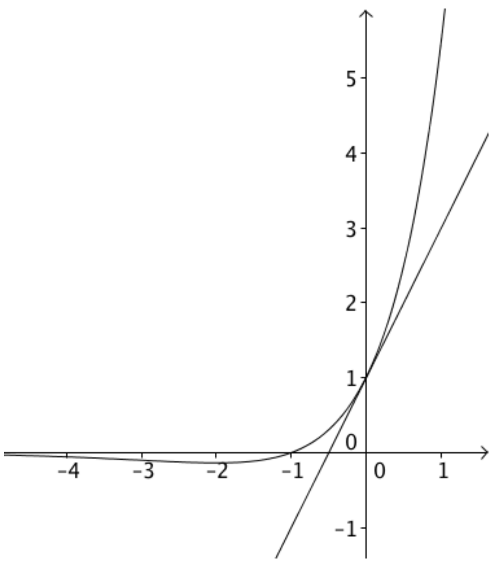
a) $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$
b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.
f' est donc négative sur l'intervalle $]-\infty ; -2]$ et positive sur l'intervalle $[-2 ; +\infty[$.
f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; -2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2 ; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$		↘	$-e^{-2}$	↗	

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit : $y = 2x + 1$

d)



IV. Fonctions de la forme $x \longmapsto e^{kx}$

1) Variations

Propriété :
La fonction $x \longmapsto e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $t \longmapsto ke^{kx}$.

Démonstration :
On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $x \longmapsto f(ax+b)$ est $x \longmapsto af'(ax+b)$.
En considérant $f(x) = e^x$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kx})' = ke^{kx}$.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/RlyFEcx5Y3E

Soit $f(x) = e^{-4x}$ alors $f'(x) = -4e^{-4x}$.

Propriété :
Si $k > 0$: la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est croissante.
Si $k < 0$: la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est décroissante.

Démonstration :
On a : $(e^{kx})' = ke^{kx}$
Or, $e^{kx} > 0$ pour tout réel x et tout réel k.
Donc le signe de la dérivée $x \longmapsto ke^{kx}$ dépend du signe de k.
Si $k > 0$ alors la dérivée est positive est donc la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est croissante.
Si $k < 0$ alors la dérivée est négative est donc la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est décroissante.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction composée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-3x}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) En déduire les variations de la fonction f.

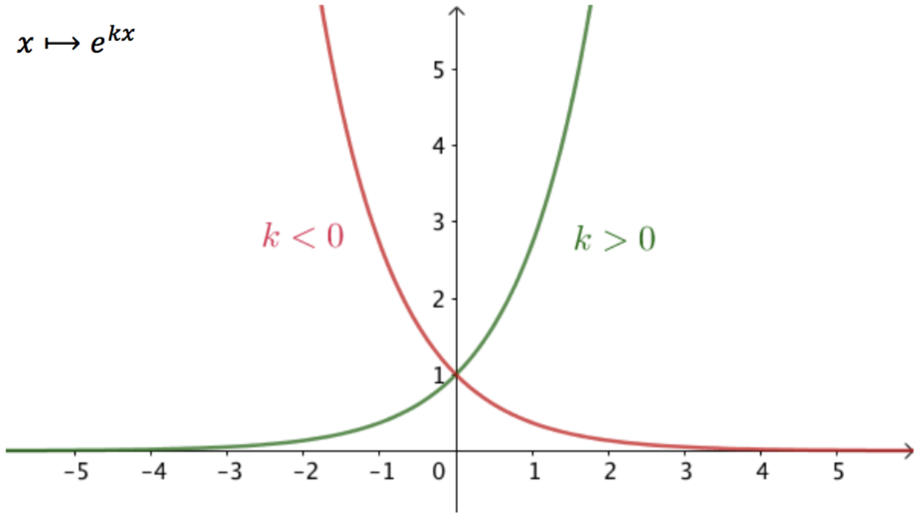
a) On a :
$f'(x) = e^{-3x} + x \times (-3)e^{-3x} = (1-3x)e^{-3x}$
En effet : $(e^{-3x})' = (-3)e^{-3x}$

b) Comme $e^{-3x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-3x$.
$1-3x \geq 0$ pour $1 \geq 3x$ soit $x \leq \frac{1}{3}$.
f'est donc positive sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.
f est donc croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

2) Limites

Propriétés :
Si $k > 0$: $\lim_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$
Si $k < 0$: $\lim_{x \to +\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{kx} = +\infty$

3) Représentation graphique



Méthode : Étudier une fonction $x \longmapsto e^{kx}$ dans une situation concrète

Vidéo https://youtu.be/IsLQwiB9Nrg

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] et telle que $f'(t) = 0{,}14f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A.
3) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

1) $f'(t) = A \times 0{,}14e^{0{,}14t} = 0{,}14 \times Ae^{0{,}14t} = 0{,}14f(t)$.
La fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ vérifient bien l'égalité $f'(t) = 0{,}14f(t)$ donc elle convient.

2) $f(0) = Ae^{0{,}14\times 0} = Ae^0 = A$.
Donc, si $f(0) = 50000$, on a : $A = 50000$.
Une expression de la fonction f est donc : $f(t) = 50000e^{0{,}14t}$.

3) Comme $k = 0{,}14 > 0$, on en déduit que la fonction $x \longmapsto e^{0{,}14t}$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction f.

4) a) $f(3) = 50000e^{0,14\times 3} = 50000e^{0,42} \approx 76000$
$f(5,5) = 50000e^{0,14\times 5,5} = 50000e^{0,77} \approx 108000$

Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.
Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

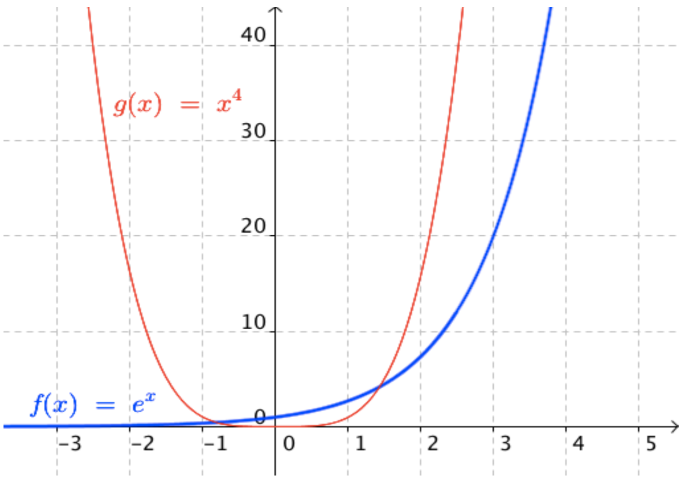
X	Y1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

V. Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Propriétés (croissances comparées) :
Pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$

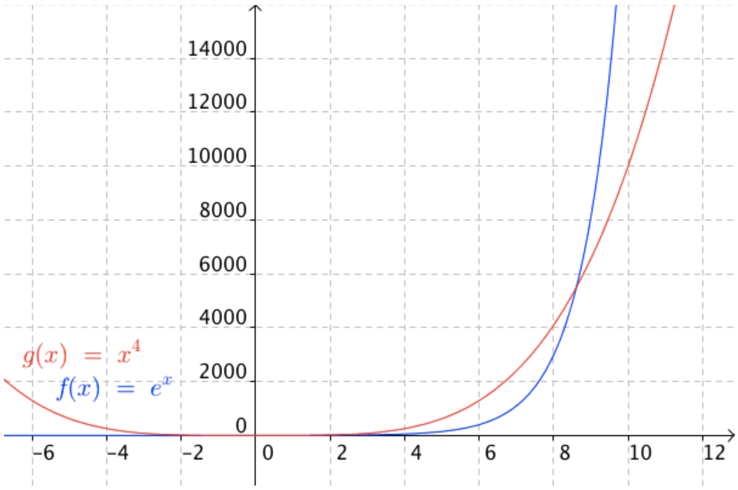
Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Exemple : Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction $x \longmapsto x^4$ dans différentes fenêtres graphiques.



Dans cette première fenêtre, on pourrait croire que la fonction puissance à une croissance plus rapide que la fonction exponentielle.

Mais en élargissant la fenêtre graphique, on constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction $x \longmapsto x^4$.



Méthode : Calculer une limite par croissance comparée

Vidéo https://youtu.be/LARFj4z8aok

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}}$

a) Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

b) On a : $\frac{x^3}{e^x} = x^3 e^{-x}$ et par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$.

c) Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$
De plus, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$ comme fonction inverse d'une fonction qui tend vers $+\infty$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}} = 0 + 0 = 0$ comme somme de fonctions qui tendent vers 0.