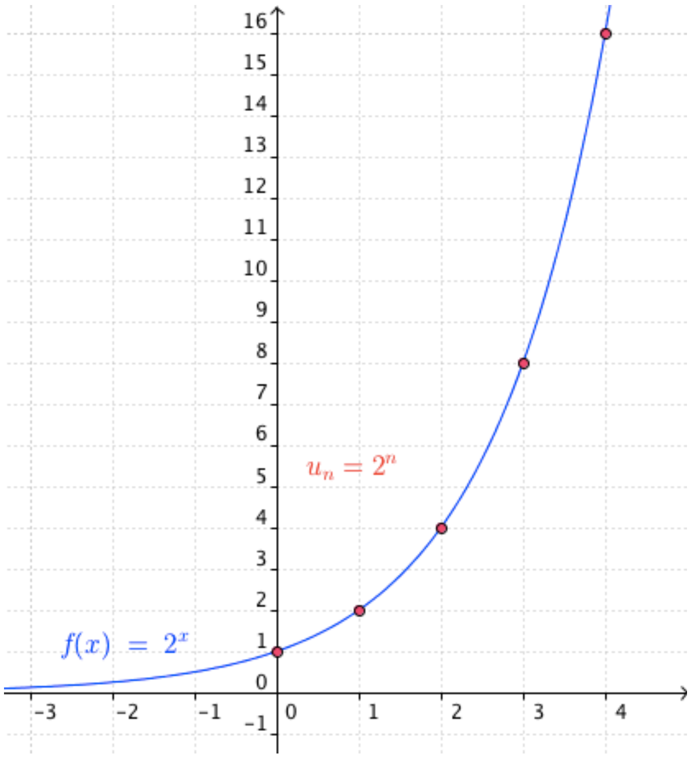
FONCTIONS EXPONENTIELLES

Partie 1 : Définition et propriété

1) Définition

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$.
Elle est définie pour tout entier naturel n.
En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base a.
Ainsi par exemple :
Pour une suite géométrique de raison $a = 2$ et de premier terme 1, on a par exemple : $u_4 = 2^4$.
Pour la fonction correspondante, on a :
$f(4) = 2^4$ mais on a également :
$f(1{,}3) = 2^{1{,}3}$.
Et de façon générale, $f(x) = 2^x$ pour tout réel x positif.

La fonction f est appelée fonction exponentielle de base 2.

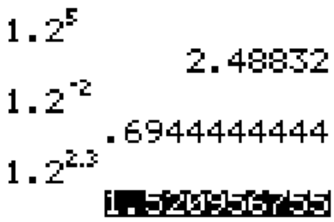


L'ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de x négatives.

Définition : La fonction $x \longmapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$, avec $a > 0$, s'appelle **fonction exponentielle de base a**.

Exemple :
La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1{,}2^x$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle.



Propriété : La fonction exponentielle de base a est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2) Propriétés

Propriétés :

a) $a^0 = 1$ et $a^1 = a$ b) $a^x \times a^y = a^{x+y}$ c) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

d) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ e) $(a^x)^n = a^{nx}$, avec n un entier relatif.

Méthode : Simplifier une expression

Vidéo https://youtu.be/PHTOZid0kzM

Simplifier les expressions suivantes :

$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$ $B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$ $C = (4{,}8^{-2{,}1})^3 \times 4{,}8^{6{,}2}$

Correction

$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$

$A = 4^{-3+(-5)}$

$A = 4^{-8}$

$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$

$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{(3^2)^5}$

$B = \dfrac{3^{3-2,5}}{3^{2\times5}}$

$B = \dfrac{3^{0,5}}{3^{10}}$

$B = 3^{0,5-10}$

$B = 3^{-9,5}$

$B = \dfrac{1}{3^{9,5}}$

$C = (4{,}8^{-2{,}1})^3 \times 4{,}8^{6{,}2}$

$C = 4{,}8^{-2{,}1\times3} \times 4{,}8^{6{,}2}$

$C = 4{,}8^{-6{,}3} \times 4{,}8^{6{,}2}$

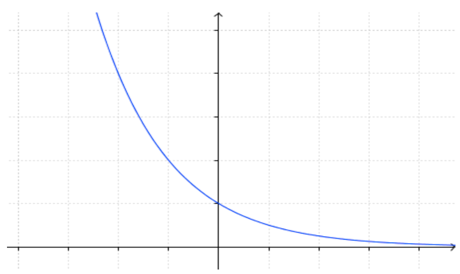
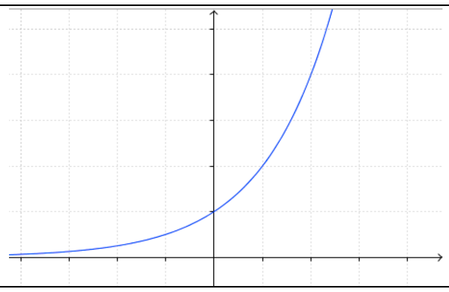
$C = 4{,}8^{-6{,}3+6{,}2}$

$C = 4{,}8^{-0{,}1}$

$C = \dfrac{1}{4{,}8^{0{,}1}}$

Partie 2 : Variations de la fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/YQoR7CFM_1U

$0 < a < 1$	$a > 1$
$x \longmapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \longmapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
	

Exemples :

Fonction $N \times a^x$	$a = \cdots$	Variation de a^x	$N = \cdots$	Variation de $N \times a^x$	Variation de f
$f(x) = -2 \times 4^x$	$a = 4$	4^x est croissante car $a > 1$	$N = -2$ est négatif	-2×4^x est décroissante	f est décroissante
$f(x) = 3 \times 0{,}5^x$	$a = 0{,}5$	$0{,}5^x$ est décroissante car $a < 1$	$N = 3$ est positif	$3 \times 0{,}5^x$ est décroissante	f est décroissante
$f(x) = -4 \times 0{,}2^x$	$a = 0{,}2$	$0{,}2^x$ est décroissante car $a < 1$	$N = -4$ est négatif	$-4 \times 0{,}2^x$ est croissante	f est décroissante
$f(x) = 7^x$	$a = 7$	7^x est croissante car $a > 1$			f est croissante
$f(x) = 0{,}4^x$	$a = 0{,}4$	$0{,}4^x$ est décroissante car $a < 1$			f est décroissante
$f(x) = 9 \times 8^x$	$a = 8$	8^x est croissante car $a > 1$	$N = 9$ est positif	9×8^x est croissante	f est croissante

Remarques :
- On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.
- Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas, $a^x = 1^x = 1$
- Quel que soit a, la fonction exponentielle passe par le point (0 ; 1). En effet, $a^0 = 1$.
-

Méthode : Étudier les variations d'une fonction exponentielle

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = 0{,}9^x$ et $g(x) = -3 \times 5^x$
Étudier les variations de f et g.

Correction
● f est de la forme $f(x) = a^x$ avec $a = 0{,}9 < 1$, donc f est décroissante.

● g est de la forme $g(x) = N \times a^x$ avec $a = 5 > 1$, donc $x \mapsto 5^x$ est croissante.
Et $N = -3$ est négatif donc g est décroissante.

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/maK64g-y3gA

Par suite d'une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par :
$f(x) = 50\,000 \times 1{,}15^x$.

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

Correction

a) $f(3) = 50\,000 \times 1{,}15^3 \approx 76\,000$
$f(5{,}5) = 50\,000 \times 1{,}15^{5{,}5} \approx 108\,000$

```
50000*1.15^3
              76043.75
50000*1.15^5.5
           107847.0143
```

b) On pose $u(x) = 1{,}15^x$.
u est de la forme $u(x) = a^x$ avec $a = 1{,}15 > 1$, donc u est croissante.
Or, $g(x) = 50\,000 \times 1{,}15^x = 50\,000 \times u(x)$, donc f est croissante sur [0 ; 10].

c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.91	99311
4.92	99450
4.93	99589
4.94	99728
4.95	99868
4.96	100007
4.97	100147

X=4.96

Résumé schématique pour les variations :

1. Si $a > 1$, la fonction a^x est **croissante**
Si $0 < a < 1$, la fonction a^x est **décroissante**

$$\underbrace{\mathrm{N} \times \overbrace{a^x}}$$

2. Si $\mathrm{N} > 0$, la fonction $\mathrm{N} \times a^x$ **garde** le sens de variation de **1.**
Si $\mathrm{N} < 0$, la fonction $\mathrm{N} \times a^x$ **change** le sens de variation de **1.**

Exemple :

1. $0 < a = 0{,}3 < 1$: la fonction $0{,}3^x$ est **décroissante**

$$\underbrace{-2 \times \overbrace{0{,}3^x}}$$

2. $\mathrm{N} = -2 < 0$: la fonction $-2 \times 0{,}3^x$ **change** le sens de variation de **1.** Elle est donc **croissante**.