REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Le cours en vidéo : https://youtu.be/naOM6YG6DJc

Partie 1 : Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Soit une droite d passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite d.

Démonstration :

$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Exemple :

La droite passant par le point $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Méthode : Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

Vidéo https://youtu.be/smCUbzJs9xo

Soit les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Correction
- On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) :
Un vecteur directeur de (AB) est : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\-3-3\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-6\\3\end{pmatrix}$.

La droite (AB) passe par le point $A\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases}x=2-t\\y=3-6t\\z=-1+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

- Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Alors $z=0$ car M appartient au plan de repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Donc $-1+3t=0$ soit $t=\frac{1}{3}$.

Et donc : $\begin{cases}x=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\\y=3-6\times\frac{1}{3}=1\\z=0\end{cases}$

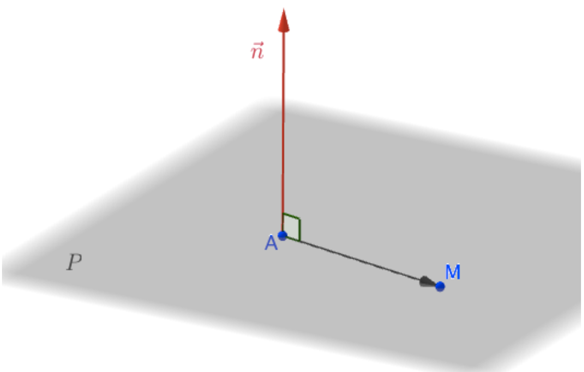
Le point M a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\1\\0\end{pmatrix}$.

Partie 2 : Équation cartésienne d'un plan

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation de la forme
$ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que
$ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$, est un plan.
Cette équation s'appelle **équation cartésienne** du plan P.

Démonstration au programme :
Vidéo https://youtu.be/GKsHtrIml_o



- Soit un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ de P.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$
- Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).

On note *E* l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$

Alors le point $A\begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0.$

E est donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Donc l'ensemble *E* est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple : Le plan d'équation cartésienne $x - y + 5z + 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan

Vidéo https://youtu.be/s4xql6IPQBY

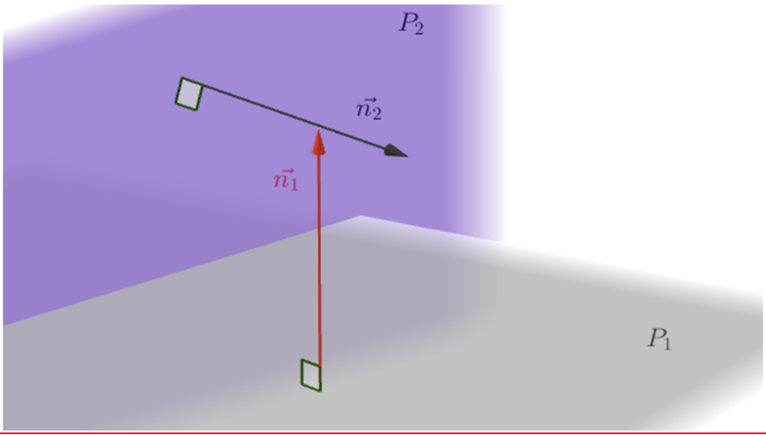
Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction

- Une équation cartésienne de P est de la forme $3x - 3y + z + d = 0$.
- Le point A appartient à P donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$3 \times (-1) - 3 \times 2 + 1 + d = 0$ donc $d = 8$.
Une équation cartésienne de P est donc : $3x - 3y + z + 8 = 0$.

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Vidéo https://youtu.be/okvo1SUtHUc

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives :
$2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$.
Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

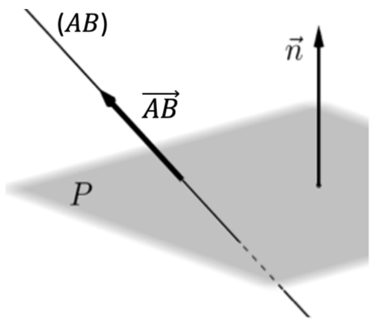
Correction
Les plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.
Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$.
$\vec{n}.\overrightarrow{n'}=2\times2+4\times(-5)+4\times4=0$
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux donc les plans P et P' sont perpendiculaires.

Partie 3 : Applications

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Vidéo https://youtu.be/BYBMauyizhE

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x-y+3z-2=0$.
Soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.
a) Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
b) Déterminer leur point d'intersection.



Correction
a) Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.
(AB) et P sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.
On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$.
Comme : $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-2\times2+3\times3\neq0$, on conclut que (AB) et le plan P ne sont pas parallèles et donc sont sécants.

b) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :
$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, intersection de (AB) et de P, vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases}x = 1 - 2t\\ y = 2\\ z = -3 + 3t\\ 2x - y + 3z - 2 = 0\end{cases}$$

On a donc : $2(1 - 2t) - 2 + 3(-3 + 3t) - 2 = 0$

$5t - 11 = 0$ soit $t = \frac{11}{5}$

D'où : $\begin{cases}x = 1 - 2 \times \frac{11}{5} = -\frac{17}{5}\\ y = 2\\ z = -3 + 3 \times \frac{11}{5} = \frac{18}{5}\end{cases}$

Ainsi la droite (AB) et le plan P sont sécants en $M\begin{pmatrix}-\frac{17}{5}\\ 2\\ \frac{18}{5}\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Vidéo https://youtu.be/RoacrySlUAU

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Correction

On appelle H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases}x = 1 - 2t\\ y = 2t \qquad , t \in \mathbb{R}.\\ z = 2 - t\end{cases}$$

Le point H appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient les équations du système paramétrique de (AB).

On a ainsi : $H\begin{pmatrix}1 - 2t\\ 2t\\ 2 - t\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}1 - 2t\\ 2t - 1\\ 2 - t + 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - 2t\\ 2t - 1\\ 4 - t\end{pmatrix}$

Or, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont othogonaux, donc :

$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$

$(1 - 2t) \times (-2) + (2t - 1) \times 2 + (4 - t) \times (-1) = 0$

$-2 + 4t + 4t - 2 - 4 + t = 0$

$9t - 8 = 0$

$t = \frac{8}{9}$

Le point H, projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), a donc pour coordonnées :

$$H\begin{pmatrix} 1 - 2 \times \frac{8}{9} \\ 2 \times \frac{8}{9} \\ 2 - \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans - NON EXIGIBLE -

Vidéo https://youtu.be/4dkZ0OQQwaQ

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives :
$-x + 2y + z - 5 = 0$ et $2x - y + 3z - 1 = 0$.
1) Démontrer que les plans P et P' sont sécants.
2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.

Correction
1) P et P' sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.
Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de d, intersection de P et de P', vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y + z - 5 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x = t$. On a alors :

$$\begin{cases} x = t \\ -t + 2y + z - 5 = 0 \\ 2t - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y + 3z = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y + 3(-2y + t + 5) = 1 - 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y - 6y + 3t + 15 = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -7y = -14 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + \frac{5}{7}t \\ z = -2\left(2 + \frac{5}{7}t\right) + t + 5 \end{cases}$$

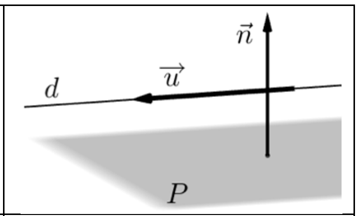
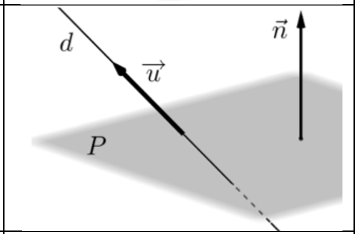
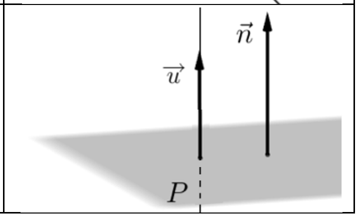
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + \frac{5}{7}t \\ z = 1 - \frac{3}{7}t \end{cases}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de d, avec $t \in \mathbb{R}$.

RÉSUMÉ : Pour démontrer des positions relatives

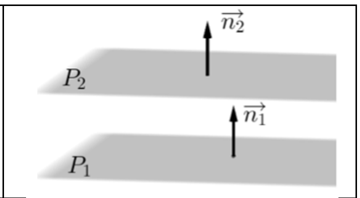
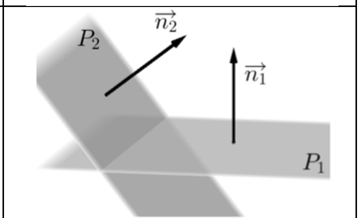
- d droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
  P plan de vecteur normal $\vec{n}$.

d et P sont…

parallèles	$\vec{u}.\vec{n} = 0$	
sécants	$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$	
orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires	

- P_1 plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$.
  P_2 plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$.

P_1 et P_2 sont…

parallèles	$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ colinéaires	
sécants	$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ non colinéaires	
perpendiculaires	$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$