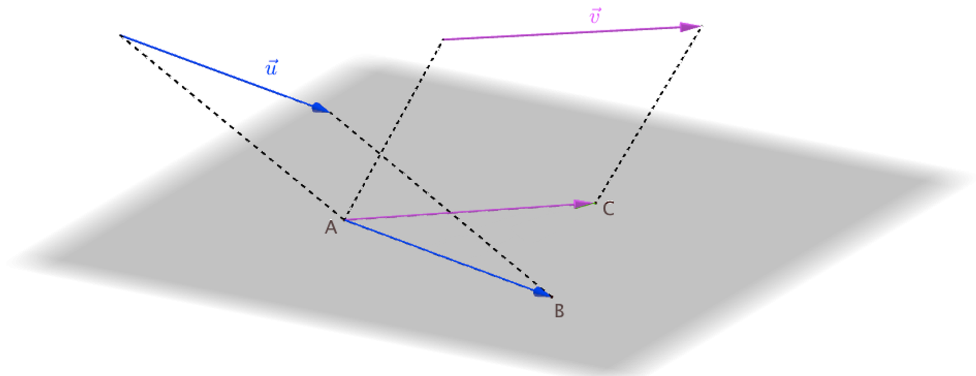
ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/pMQBaCqLPsQ

Partie 1 : Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

1) Définition et propriétés

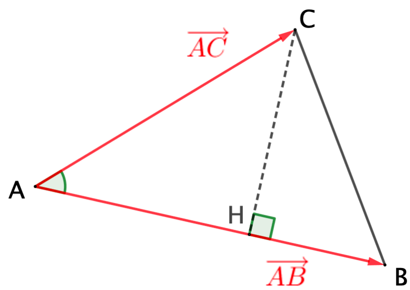
Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et
$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan P contenant les points A, B et C.
On appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.



On retrouve alors dans l'espace toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan :

Propriétés permettant de calculer un produit scalaire :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$
- H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$



Propriétés algébriques :

- **Symétrie** : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
- **Bilinéarité** : $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ et $\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = k\vec{u}\,.\,\vec{v}$, avec $k \in \mathbb{R}$
- **Identités remarquables** :
  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$ → On peut également noter : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$
  $(\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- **Formule de polarisation** :

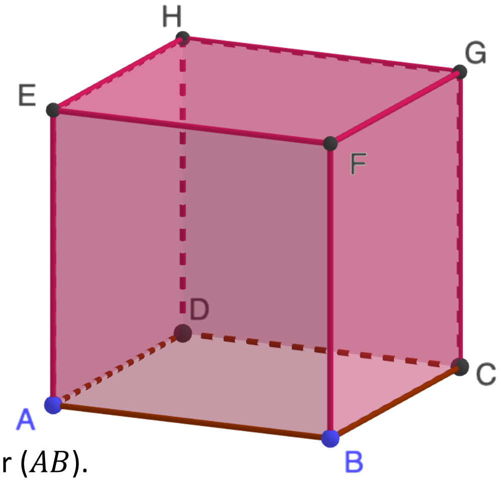
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \qquad \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Propriété d'orthogonalité :
$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Méthode : Calculer le produit scalaire dans l'espace

Vidéo https://youtu.be/vp3ICG3rRQk



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.
Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ b) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{HD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GF}$

Correction

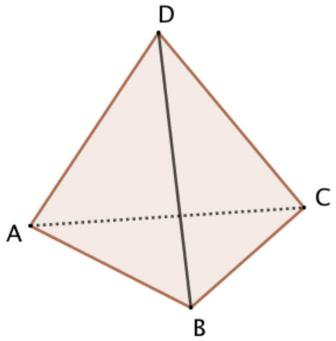
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$, B étant le projeté orthogonal de F sur (AB).
$= AB^2$
$= a^2$

b) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EA} = 0$ car $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA}$
$= -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$
$= -AD^2$
$= -a^2$

Méthode : Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité

Vidéo https://youtu.be/8Obh6cIZeEw



Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur l.
Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

Correction

On va prouver que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$
$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$
$= -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

Dans le triangle équilatéral ABD, on a :
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = AD \times AB \times cos\left(\widehat{DAB}\right)$
$= l \times l \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{l^2}{2}$

On démontre de même dans le triangle équilatéral ADC que : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \frac{l^2}{2}$

Ainsi : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} = 0$
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux, et donc
Les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

2) Produit scalaire dans un repère orthonormé

Définitions :

● Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si :

- les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux,
- les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{\imath}\| = 1$, $\|\vec{\jmath}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.

● Un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormé,** si sa base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée**.**

Propriétés : Dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

● Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

● Soit $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ deux points de l'espace.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Démonstration :

● $\vec{u}.\vec{v} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}).(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k})$

$= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + xz'\vec{\imath}.\vec{k} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath} + yz'\vec{\jmath}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{\imath} + xy'\vec{k}.\vec{\jmath} + zz'\vec{k}.\vec{k}$

$= xx' + yy' + zz'$

En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple $(\vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$:

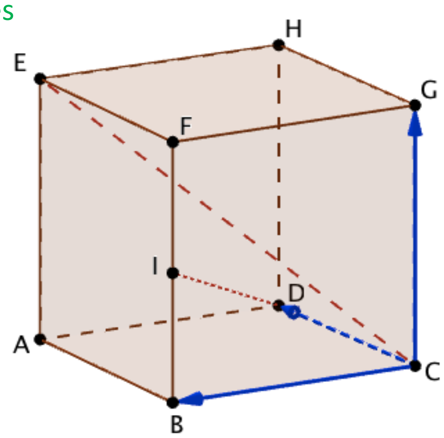
$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|^2 = 1$, $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\jmath}\|^2 = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$

● On a, en particulier : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$.

● Et : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Vidéo https://youtu.be/N1IA15sKH-E



On considère le repère de l'espace $(C\,; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$.

I est le milieu du segment $[BF]$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont-ils orthogonaux ?

Correction

On a : $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0{,}5-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$.

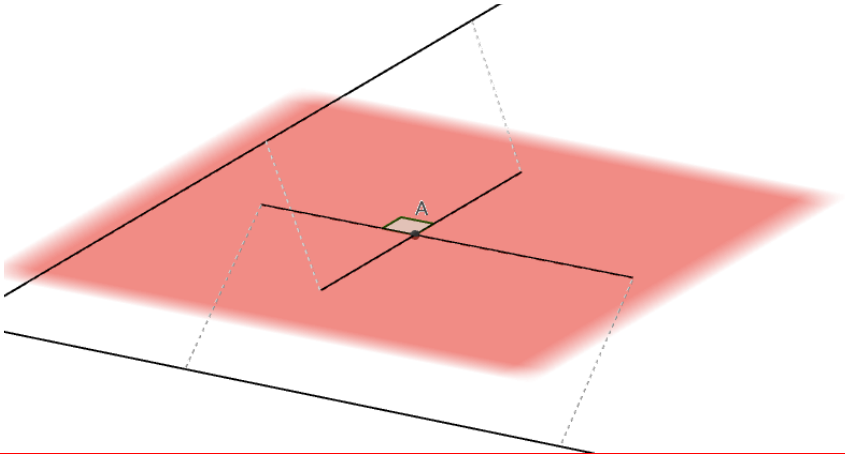
Alors : $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DI} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0{,}5 = 0{,}5 \neq 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ ne sont donc pas orthogonaux.

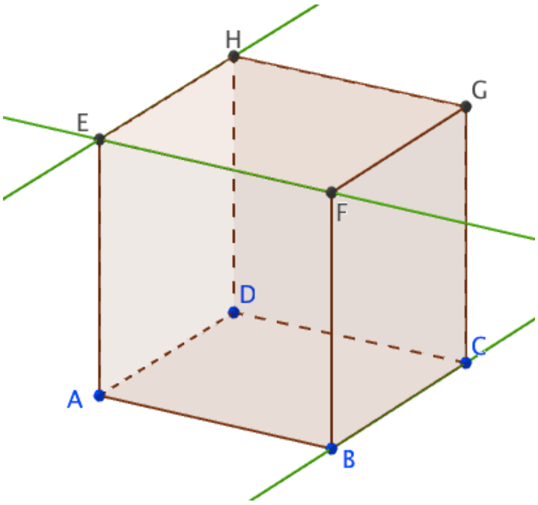
Partie 2 : Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un même point quelconque sont perpendiculaires.



Exemple :

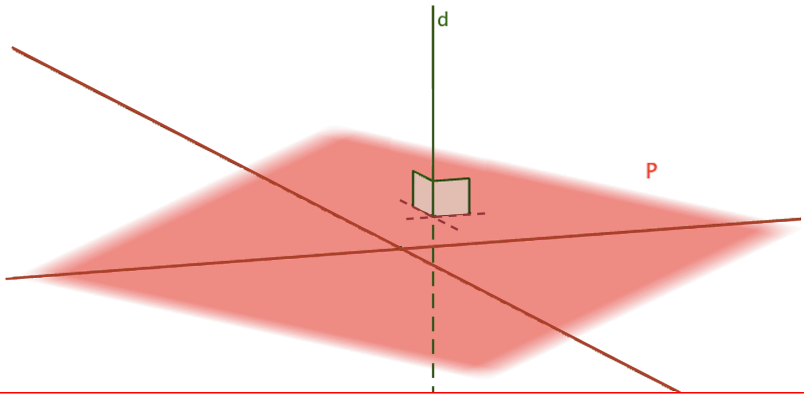


$ABCDEFGH$ est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.

Remarques :
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

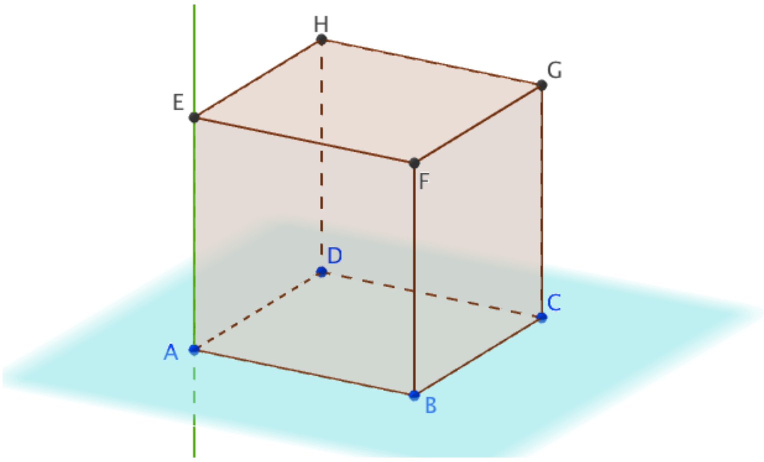
Propriété : Une droite d de l'espace est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de P.



Propriété : Si une droite d de l'espace est orthogonale à un plan P alors elle est orthogonale à toutes les droites de P.

Démonstration :
Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.
Soit une droite quelconque Δ de P de vecteur directeur $\vec{w}$.
Démontrons que Δ est orthogonale à d.
$\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de P (car non colinéaires).
Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Donc $\vec{w}.\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$, car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.
Et donc d est orthogonale à Δ.

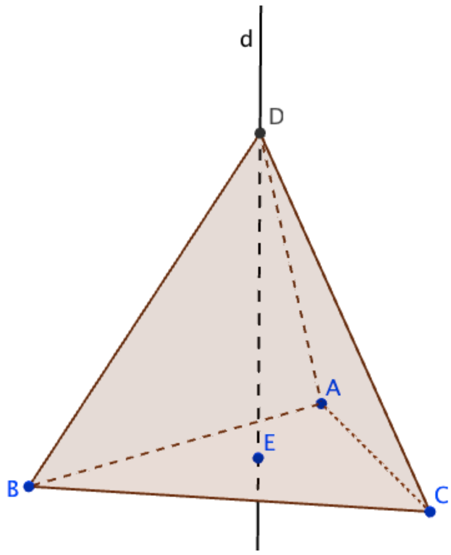
Exemple :
$ABCDEFGH$ est un cube.
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABD).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).



Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

Vidéo https://youtu.be/qKWghhaQJUs

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses hauteurs.
La droite d passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide $ABCD$ est telle que D soit un point de la droite d.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.



Correction
La droite d est orthogonale au plan (ABC).
La droite d est donc orthogonale à toutes les droites du plan (ABC).
Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite d est orthogonale à la droite (AC).

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE).

Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et d.
Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).

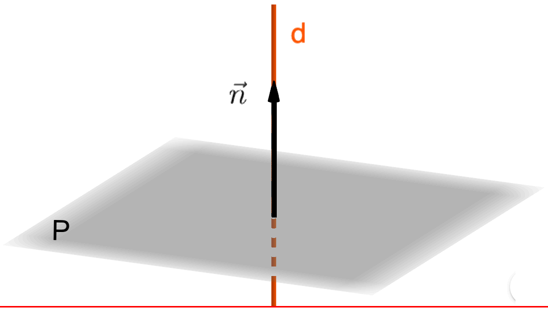
Et donc la droite (AC) est orthogonale à toutes les droites du plan (BED).

La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est orthogonale à la droite (BD).

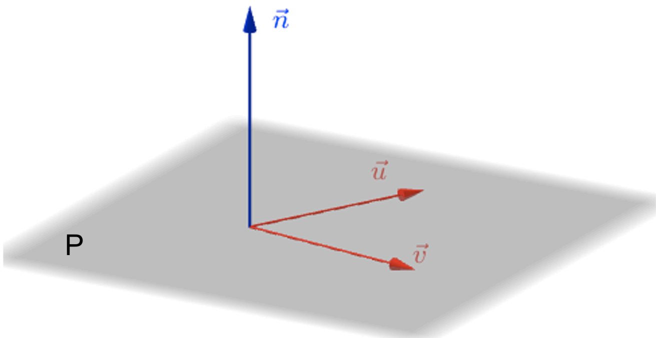
Partie 3 : Vecteur normal à un plan

1) Définition et propriétés

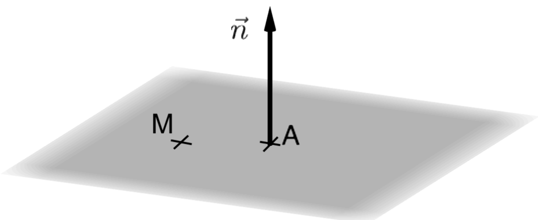
Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan P si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan P.



Propriété : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P, s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de P.



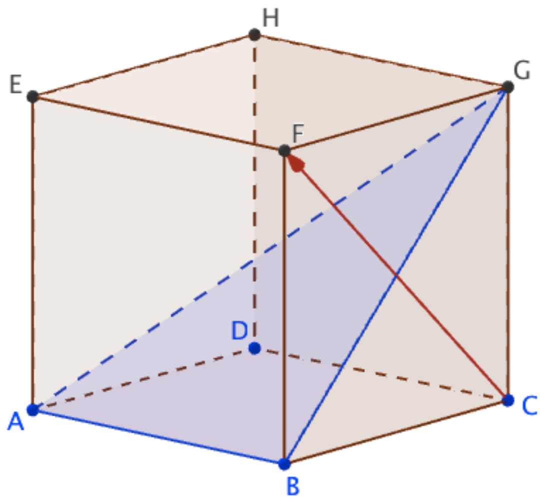
Propriété : Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Au XIXe siècle, le vecteur normal $\vec{n}$, appelé produit vectoriel, est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4



$ABCDEFGH$ est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).

Correction

On considère le repère orthonormé $\left(B\,;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$.

Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a ainsi :

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc :

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG} = 0 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0 \times (-1) - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$

Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/IDBEI6thBPU

Dans un repère orthonormé, on donne : $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Correction

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal au plan (ABC). Il est tel que :

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$ soit $\begin{cases}-2a + b + 3c = 0\\ a - 2b = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2 \times 2b + b + 3c = 0\\ a = 2b\end{cases}$

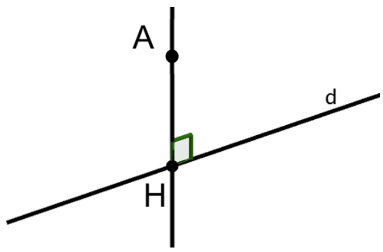
$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b + 3c = 0 \\ a = 2b \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 2b \end{cases}$

Prenons par exemple, $b = 1$ (arbitrairement choisi) alors $c = 1$ et $a = 2$.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ABC).

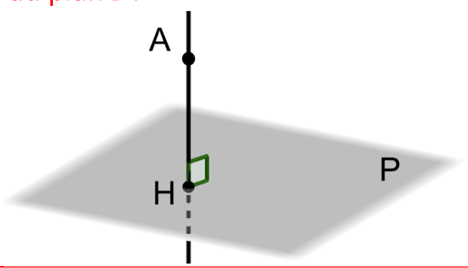
Remarque :
La solution n'est pas unique. Tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est solution.

2) Projections orthogonales

Définitions :
● Soit un point A et une droite d de l'espace.
Le **projeté orthogonal du point A sur la droite d** est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.



● Soit un point A et un plan P de l'espace.
Le **projeté orthogonal du point A sur le plan P** est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.

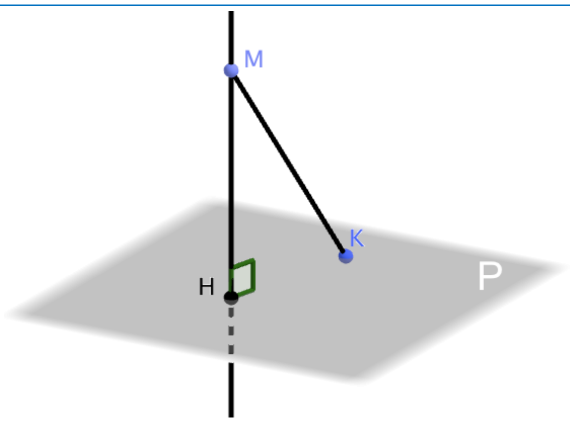


Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

Démonstration au programme :
Vidéo https://youtu.be/c7mxA0TbVFU

Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan P.
Supposons qu'il existe un point K du plan P plus proche de M que l'est le point H.

$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.
Donc $KM^2 \leq HM^2$.



Or, (MH) est orthogonale à P, donc (MH) est orthogonale à toute droite de P.
En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK).
Le triangle MHK est donc rectangle en H.
D'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$
Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.
Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point M.

Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à un plan

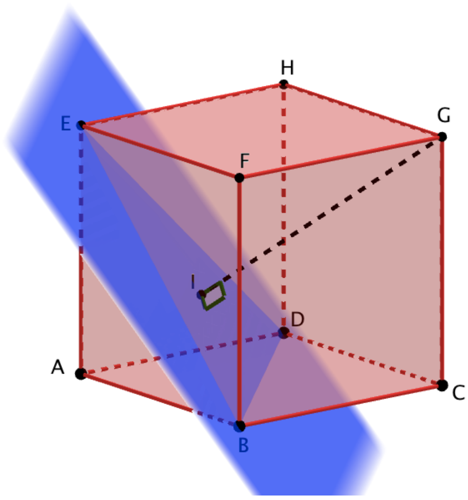
Vidéo https://youtu.be/1b9FtX4sCmQ

Soit un cube $ABCDEFGH$. On considère le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
a) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal I du point G sur le plan (BDE).
b) En déduire la distance GI du point G au plan (BDE).

Correction

a) On cherche à déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point I. Dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



On a alors : $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$

Or, (GI) est orthogonale au plan BDE donc le vecteur $\overrightarrow{GI}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EB}$. Soit :

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{GI} = 0$
$-1 \times (x-1) + 1 \times (y-1) + 0 \times (z-1) = 0$
$-x + 1 + y - 1 = 0$
$x = y$

$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GI} = 0$
$1 \times (x-1) + 0 \times (y-1) + (-1) \times (z-1) = 0$
$x - 1 - z + 1 = 0$
$x = z$

On a ainsi : $x = y = z$

De plus, $\overrightarrow{GI}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BI}$, soit :

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{GI} = 0$
$(x-1)^2 + y(y-1) + z(z-1) = 0$
$(x-1)^2 + x(x-1) + x(x-1) = 0$ car $x = y = z$
$(x-1)(x-1+x+x) = 0$
$(x-1)(3x-1) = 0$
Donc $3x - 1 = 0$ car $x - 1 \neq 0$ sinon I et G sont confondus, ce qui est impossible.
Soit : $x = \dfrac{1}{3}$
On en déduit les coordonnées de I : $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

b) Et ainsi :

$$IG = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}155$$