

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/pMQBaCqLPsQ>

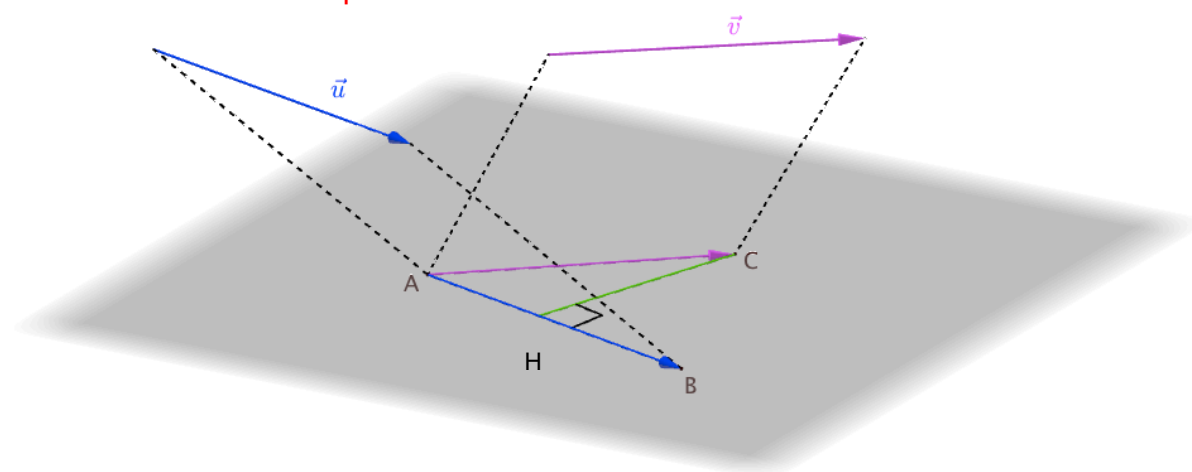
I. Produit scalaire de deux vecteurs

1) Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. A , B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan P contenant les points A , B et C .

Définition :

On appelle **produit scalaire de l'espace** de \vec{u} et \vec{v} le produit $\vec{u} \cdot \vec{v}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan P .



On a ainsi :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si \vec{u} ou \vec{v} est un vecteur nul,
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$

Exemple :

▶ Vidéo <https://youtu.be/vp3ICG3rRQk>

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a .

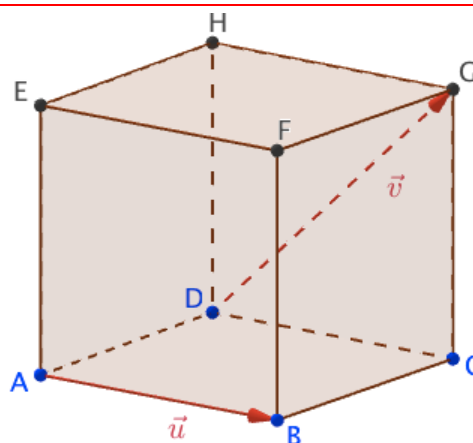
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} \\ &= AB \times AB = a^2 \end{aligned}$$

2) Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés : Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Bilinéarité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$
 $(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), k \in \mathbb{R}$
- Orthogonalité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont orthogonaux (ou $\vec{u} = 0$ et $\vec{v} = 0$)



Démonstration :

Il existe un plan P tel que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} admettent des représentants dans P . Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

3) Identités remarquables

Propriétés : Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace, on a :

$$1) \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$2) \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

4) Formules de polarisation

Propriété : Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace, on a :

$$1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$2) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$3) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

II. Produit scalaire dans un repère orthonormé1) Base et repère orthonormé

Définition : Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si :

- les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont deux à deux orthogonaux,
- les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont unitaires, soit : $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.

Définition : Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormé**, si sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

2) Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère

orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Et en particulier : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + xz'\vec{i} \cdot \vec{k} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} + yz'\vec{j} \cdot \vec{k} + zx'\vec{k} \cdot \vec{i} + xy'\vec{k} \cdot \vec{j} + zz'\vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= xx' + yy' + zz' \end{aligned}$$

En effet, on a par exemple dans le plan défini par le couple $(\vec{i}; \vec{j})$:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\|^2 = 1 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

On a en particulier : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$.

Exemple :

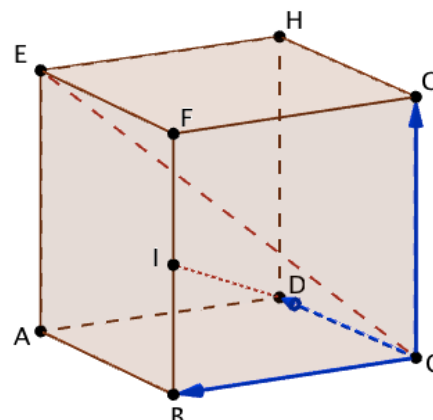
▶ Vidéo <https://youtu.be/N1IA15sKH-E>

On considère le repère de l'espace $(C ; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$.

Alors : $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DI} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 0,5-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DI} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Alors : $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DI} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0,5 = 0,5$.

Les vecteurs \overrightarrow{CE} et \overrightarrow{DI} ne sont pas orthogonaux.



3) Conséquence : Expression de la distance entre deux points

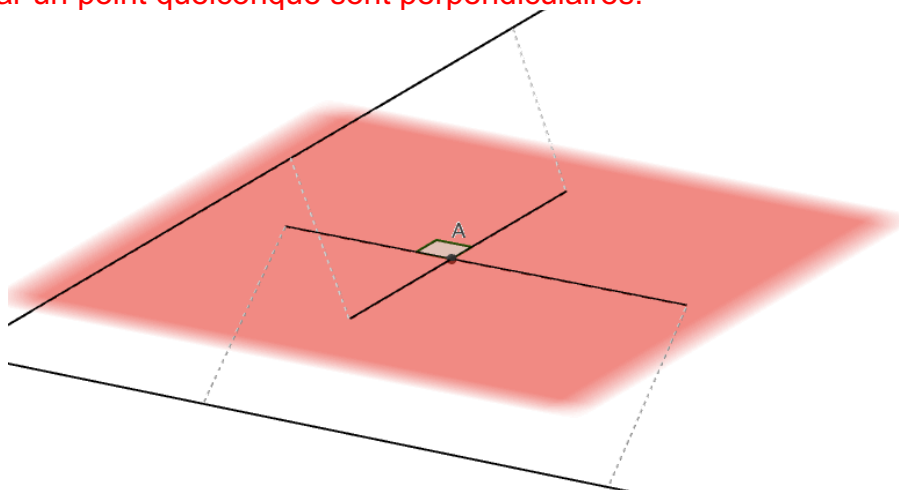
Propriété : Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

II. Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux droites

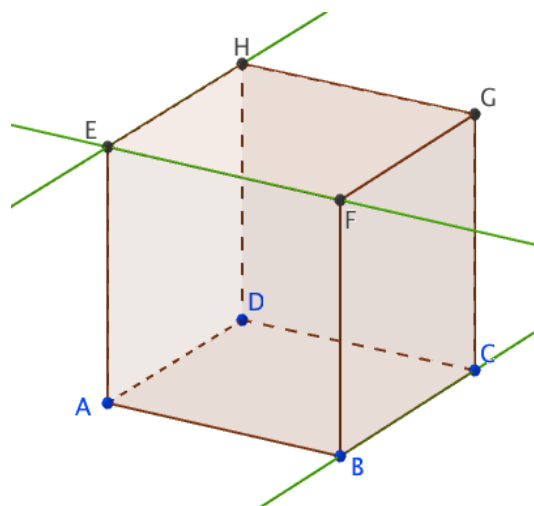
Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



Exemple :

ABCDEFGH est un cube.

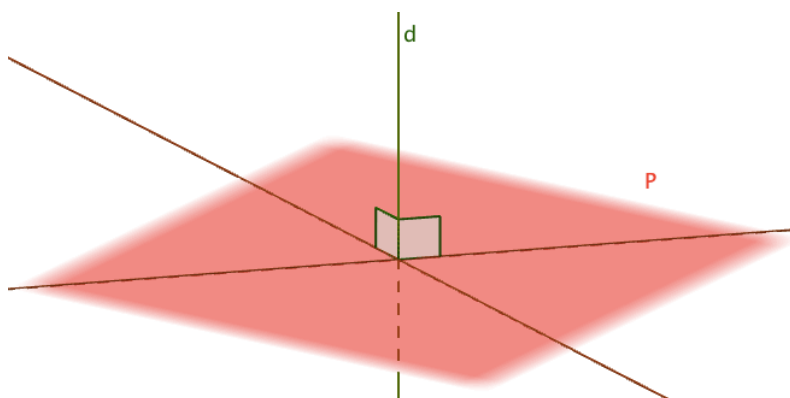
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.

Remarques :

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de P .



Propriété : Si une droite d est orthogonale à un plan P alors elle est orthogonale à toutes les droites de P .

Démonstration :

Soit une droite d de vecteur directeur \vec{n} orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P . Soit \vec{u} et \vec{v} des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2 .

Alors \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur \vec{n} .

Soit une droite quelconque Δ de P de vecteur directeur \vec{w} .

Démontrons que Δ est orthogonale à d .

\vec{w} peut se décomposer en fonction de \vec{u} et \vec{v} qui constituent une base de P (car non colinéaires).

Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

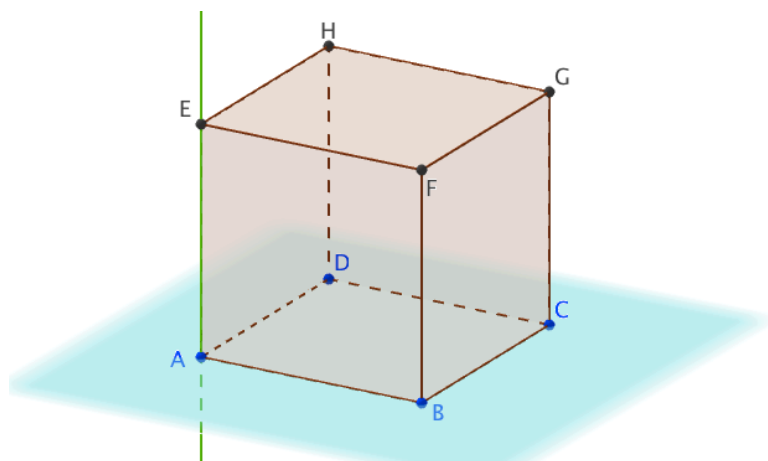
Donc $\vec{w} \cdot \vec{n} = x\vec{u} \cdot \vec{n} + y\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, car \vec{n} est orthogonal avec \vec{u} et \vec{v} .

Donc \vec{n} est orthogonal au vecteur \vec{w} .

Et donc d est orthogonale à Δ .

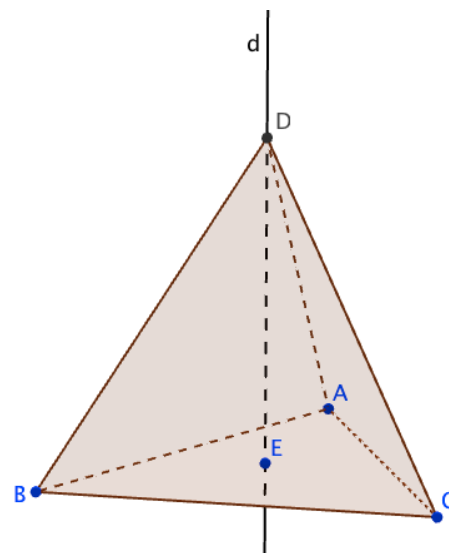
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
 (AE) est perpendiculaire aux droites
 (AD) et (AB).
 (AB) et (AD) sont sécantes et
 définissent le plan (ABC).
 Donc (AE) est orthogonal au plan
 (ABC).

Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

📺 Vidéo <https://youtu.be/gKWghhaQJUs>

ABC est un triangle équilatéral. E est le point
 d'intersection de ses médianes.
 La droite d passant par E est orthogonale au plan
 (ABC).
 La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la
 droite d .
 Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont
 orthogonales.



La droite d est orthogonale au plan (ABC).
 Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la
 droite (AC) est orthogonale à la droite d .

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.

Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et d .
 Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).

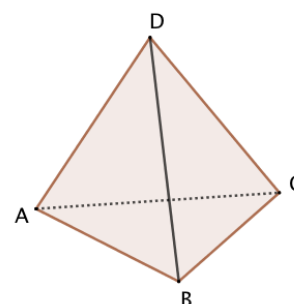
La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est orthogonale à la droite (BD).

Méthode : Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité

📺 Vidéo <https://youtu.be/8Obh6clZeEw>

Soit un tétraèdre régulier ABCD d'arêtes de longueur l .
 Démontrer que les arêtes [AD] et [BC] sont orthogonales.

On va prouver que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Dans le triangle équilatéral ABD, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} &= AD \times AB \times \cos(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) \\ &= l \times l \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{l^2}{2}\end{aligned}$$

On démontre de même dans le triangle équilatéral ADC que :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{l^2}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} = 0$$

Les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{BC} sont donc orthogonaux.

Les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales

Remarque : Dans un tétraèdre régulier, deux arêtes quelconques opposés sont orthogonales.

III. Vecteur normal à un plan

1) Définition et propriétés

Définition : Un vecteur non nul \vec{n} de l'espace est **normal** à un plan P lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans P .

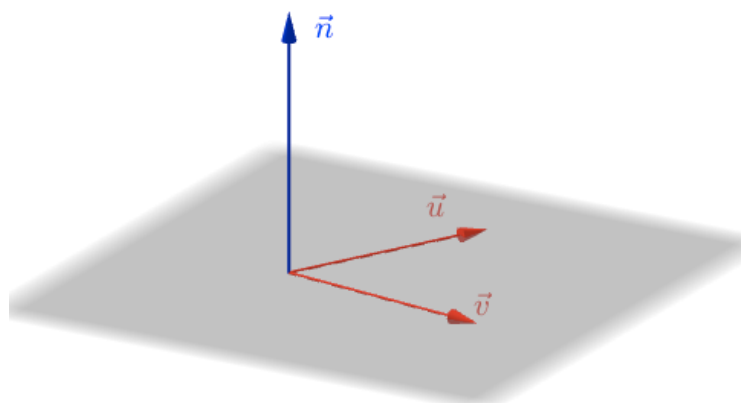
Propriété : - Soit un point A et un vecteur \vec{n} non nul de l'espace.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan de l'espace.

- Réciproquement, soit P un plan de l'espace. Pour tout point A de P et tout vecteur normal \vec{n} de P , P est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

- Admis -

Théorème : Un vecteur non nul \vec{n} de l'espace est normal à un plan P , s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P .





Au XIXe siècle, le vecteur normal \vec{n} , appelé produit vectoriel, est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4

$ABCDEFGH$ est un cube.

Démontrer que le vecteur \overrightarrow{CF} est normal au plan (ABG) .

On considère le repère $(B ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.

Dans ce repère : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

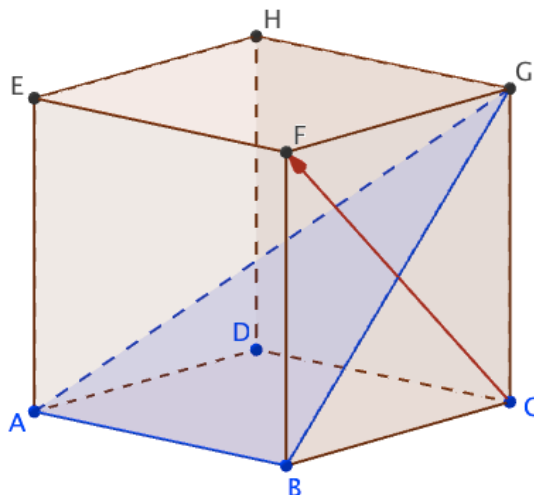
On a ainsi :

$\overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$$

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times (-1) - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$

Donc \overrightarrow{CF} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG) , il est donc normal à (ABG) .



Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Vidéo <https://youtu.be/IDBEI6thBPU>

Dans un repère orthonormé, soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal au plan (ABC) . Il est tel que :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -2a + b + 3c = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \times 2b + b + 3c = 0 \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b + 3c = 0 \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 2b \end{cases}$$

Prenons par exemple, $b = 1$ (arbitrairement choisi) alors $c = 1$ et $a = 2$.

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ABC) .

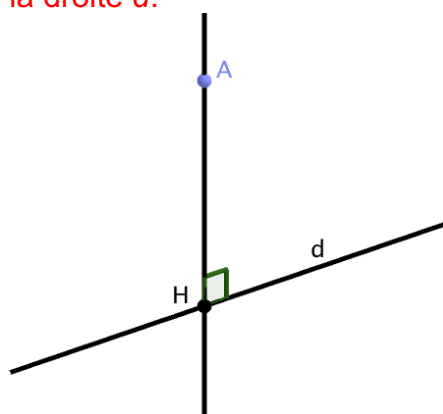
Remarque : La solution n'est pas unique. Tout vecteur colinéaire à \vec{n} est solution.

IV. Projection orthogonale

1) Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition : Soit un point A et une droite d de l'espace.

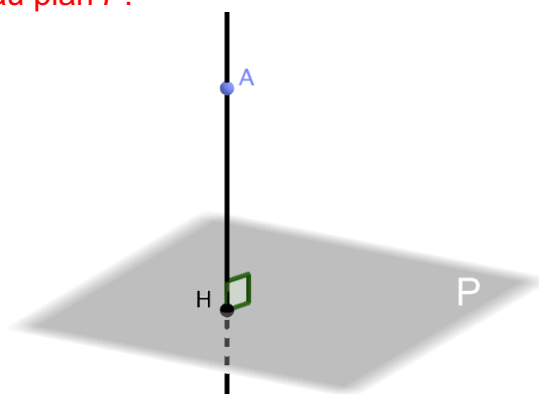
La projection orthogonale de A sur d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d .



2) Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition : Soit un point A et un plan P de l'espace.

La projection orthogonale de A sur P est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P .



Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M .

Démonstration au programme :

📺 Vidéo <https://youtu.be/c7mxA0TbVFU>

Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan P .

Supposons qu'il existe un point K du plan P plus proche de M que l'est le point H .

$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M .

Donc $KM^2 \leq HM^2$.

Or, (MH) est orthogonale à P , donc (MH) est orthogonale à toute droite de P .

En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK) .

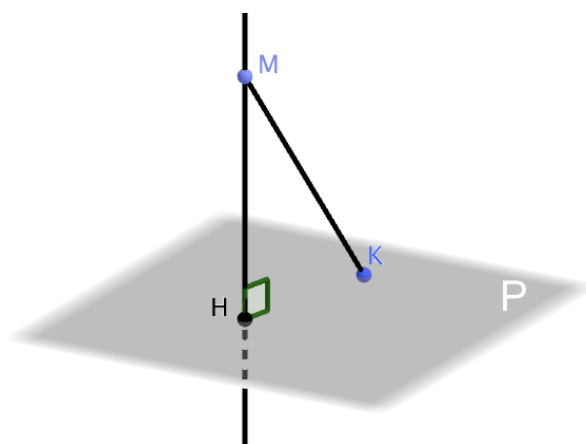
Le triangle MHK est donc rectangle en H .

D'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$

Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.

Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H .

On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point M .



Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à un plan

📺 Vidéo <https://youtu.be/1b9FtX4sCmQ>

On considère un cube $ABCDEFGH$.

Calculer la distance du point G au plan BDE .

Soit I le projeté orthogonal du point G sur le plan BDE .

La distance du point G au plan BDE est égale à la longueur GI .

On considère le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On cherche à déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du

point I . Dans ce repère, on a :

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a alors : } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{EB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

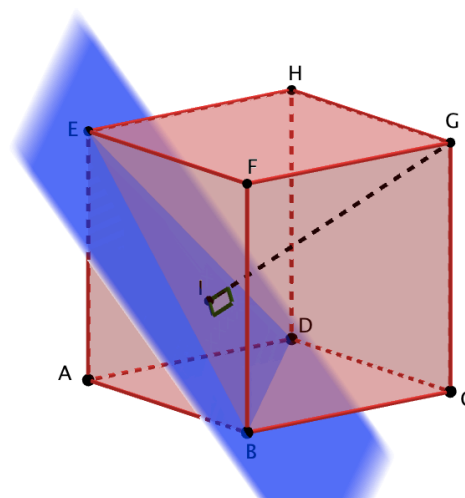
$$\overrightarrow{GI} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Or, (GI) est orthogonale au plan BDE donc le vecteur \overrightarrow{GI} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{EB} . Soit :

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{GI} = 0$$

$$-1 \times (x-1) + 1 \times (y-1) + 0 \times (z-1) = 0$$

Yvan Monka - Académie de Strasbourg - www.maths-et-tiques.fr



$$-x + 1 + y - 1 = 0$$

$$x = y$$

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{GI} = 0$$

$$1 \times (x - 1) + 0 \times (y - 1) + (-1) \times (z - 1) = 0$$

$$x - 1 - z + 1 = 0$$

$$x = z$$

On a ainsi : $x = y = z$

De plus, \overrightarrow{GI} est orthogonal au vecteur \overrightarrow{BI} , soit :

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{GI} = 0$$

$$(x - 1)^2 + y(y - 1) + z(z - 1) = 0$$

$$(x - 1)^2 + x(x - 1) + x(x - 1) = 0 \text{ car } x = y = z$$

$$(x - 1)(x - 1 + x + x) = 0$$

$$(x - 1)(3x - 1) = 0$$

Donc $3x - 1 = 0$ car $x - 1 \neq 0$ sinon I et G sont confondus, ce qui est impossible.

$$\text{Soit : } x = \frac{1}{3}$$

On en déduit les coordonnées de I : $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

Et ainsi :

$$IG = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1,155$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales