ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/qHF5kiDFkW8

I. Notion d'équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemples :
a) L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
Dans ce cas, une solution de cette équation est $y = 5x$. En effet, $(5x)' = 5$.
On peut également noter l'équation différentielle sous la forme : $\frac{dy}{dx} = 5$.
b) Une solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.
Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.
Par exemple, $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle.
En effet, $(x^2 + 1)' = 2x$.

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Vidéo https://youtu.be/LX8PxR-ScfM

Prouver que la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Pour tout x de sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :
$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$
Donc, g est bien solution de l'équation $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

II. Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

Vidéo https://youtu.be/YJNHTq85tJA

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.
1) a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.
2) Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

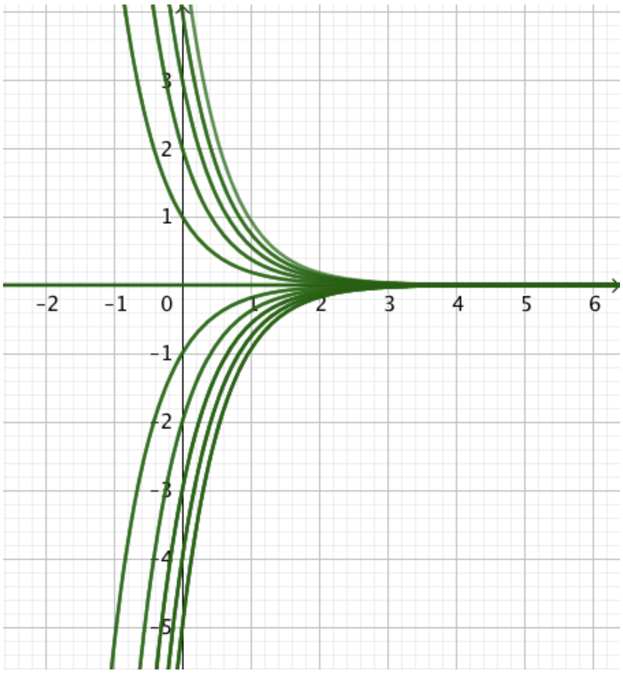
1) a) $3y' + 5y = 0$

$3y' = -5y$

$y' = -\frac{5}{3}y$

Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C, on obtient :



2) $y(1) = 2$

Donc : $Ce^{-\frac{5}{3}\times 1} = 2$

$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$

$C = 2e^{\frac{5}{3}}$

Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{5}{3}}\, e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

<u>Propriété :</u> Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

<u>Démonstrations :</u>
- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$
- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

III. Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$. Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.

Or : $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.

Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.

g est donc solution de l'équation $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto u(x) + v(x)$$

où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$
et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Vidéo https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg

Vidéo https://youtu.be/CFZr44vny3w

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

2) Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$.

1) $2y' - y = 3$

$2y' = y + 3$

$y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$

Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Soit : $y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$

2) $y(0) = -1$

Donc : $Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = -1$

$C - 3 = -1$

$C = 2$

Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

IV. Équations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Vidéo https://youtu.be/kIU6n691j7I

Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Propriété (non exigible) :
Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$, où $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

$y'' + 9y = 0$ s'écrit $y'' + 3^2 y = 0$.
Les solutions sont alors de la forme :
$y_{C_1 C_2}(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$

- Or, $y(0) = 1$ donc : $C_1 \times 1 + C_2 \times 0 = 1$ soit $C_1 = 1$.

- Et, $y'(0) = 2$.
$y'_{C_1 C_2}(x) = -3C_1 \sin(3x) + 3C_2 \cos(3x)$
Donc : $-3C_1 \times 0 + 3C_2 \times 1 = 2$ soit $C_2 = \frac{2}{3}$.

On en déduit la solution de l'équation : $y(x) = \cos(3x) + \frac{2}{3}\sin(3x)$.