DÉRIVATION

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/XAgdHblbajE

Partie 1 : Rappels sur la dérivation

Playlist https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoY7qihLa2dHc9-rBgVrgWJ

Formules de dérivation :

Fonction	Dérivée
a, $a \in \mathbb{R}$	0
ax, $a \in \mathbb{R}$	a
x^2	$2x$
x^n $n \geq 1$ entier	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{kx}, $k \in \mathbb{R}$	ke^{kx}

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/23_Ba3N0fu4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

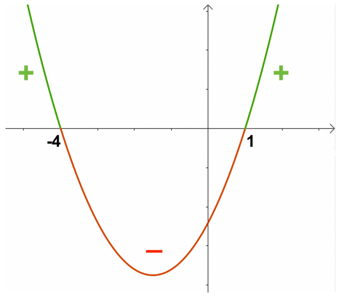
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

Correction

a) $f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 = 3x^2 + 9x - 12$.

b) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-9-\sqrt{225}}{2\times3} = -4$ et $x_2 = \frac{-9+\sqrt{225}}{2\times3} = 1$



Comme $a = 3 > 0$, les branches de la parabole représentant la fonction dérivée sont tournées vers le haut (position « 😊 »).
La dérivée est donc d'abord positive, puis négative, puis positive.

c) On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	61	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2}(-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$

$f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}$

Partie 2 : Dérivée d'une fonction composée

1) Définition d'une fonction composée

Méthode : Identifier la composée de deux fonctions

Vidéo https://youtu.be/08HgDgD6XL8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction f.

Correction
On peut décomposer la fonction f en deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x - 3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par : $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) = v \circ u\,(x) = v\big(u(x)\big) = \sqrt{x-3}$$

Définition :
On appelle **fonction composée** des fonctions u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par :
$v \circ u\ (x) = v\big(u(x)\big)$.

Méthode : Composer deux fonctions

Vidéo https://youtu.be/sZ2zqEz4hug

a) On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de x.
b) Même question avec $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$.

Correction

a) On a : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$$v \circ u(x) = v\big(u(x)\big) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$u \circ v(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

b) On a : $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$

$$v \circ u(x) = v\big(u(x)\big) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x\ + 1}$$

$$u \circ v(x) = u\big(v(x)\big) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{x}{x+1}$$

2) Dérivation d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$v \circ u$ ou $v\big(u(x)\big)$	$v' \circ u \times u'$ ou $v'\big(u(x)\big) \times u'(x)$

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée (cas général)

Vidéo https://youtu.be/lwcFgnbs0Ew

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

Correction
On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$
Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v\big(u(x)\big)$
On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$

Donc : $f'(x) = v'\big(u(x)\big) \times u'(x)$
$= e^{x^2+1} \times 2x$
$= 2xe^{x^2+1}$

3) Cas particuliers de fonctions composées

Fonction	Dérivée
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$

Démonstrations :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$

Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'\big(u(x)\big) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Soit $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

- $(u(x))^n = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$

Donc $((u(x))^n)' = v'\big(u(x)\big) \times u'(x) = n\big(u(x)\big)^{n-1} \times u'(x)$, car $v'(x) = nx^{n-1}$

Soit $((u(x))^n)' = nu'(x)\big(u(x)\big)^{n-1}$

- Démonstration analogue pour « e^u ».

Méthode : Déterminer la dérivée de fonctions composées (cas particuliers)

Vidéo https://youtu.be/kE32Ek8BXvs
Vidéo https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$ b) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$ c) $h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

Correction

a) On pose : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x - 1 \rightarrow u'(x) = 6x + 4$

Donc : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$= \dfrac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}}$
$= \dfrac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$

b) On pose : $g(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$
Donc : $g'(x) = 4u'(x)(u(x))^3$
$= 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$

c) On pose : $h(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Donc : $h'(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$
$= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$
$= -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Partie 3 : Étude d'une fonction composée

Méthode : Étudier une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/I4HkvkpqjNw
Vidéo https://youtu.be/Vx0H1DV3Yqc
Vidéo https://youtu.be/2RIBQ1LiNYU

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.
a) Étudier les limites de f à l'infini.
b) Calculer la dérivée de la fonction f.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Correction

a) **Limite en $-\infty$:**

● Comme limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.
En effet, lorsque $x \to -\infty$, on a : $X = -\frac{x}{2} \to +\infty$.

● Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

● Donc, limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^{-\frac{x}{2}} = -\infty$.

Limite en $+\infty$:
On reconnait une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ ».
Levons l'indétermination :

$$xe^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 2\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}$$

Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$.

En effet, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, en considérant que $X = \dfrac{x}{2}$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$, comme inverse de limite.

Et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-\frac{x}{2}} = 0$.

$b)\ f'(x) = 1 \times e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$, en effet : $\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$.

$$= e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

c) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \dfrac{x}{2}$.
f'est donc positive sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$ et négative sur l'intervalle $[2\,;\ +\infty[$.
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

En effet : $f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = \dfrac{2}{e}$

d)