DÉRIVATION

Rappels du cours de 1ère en vidéo : https://youtu.be/uMSNlIPBFhQ

I. Rappels

Vidéos https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoY7qihLa2dHc9-rBgVrgWJ

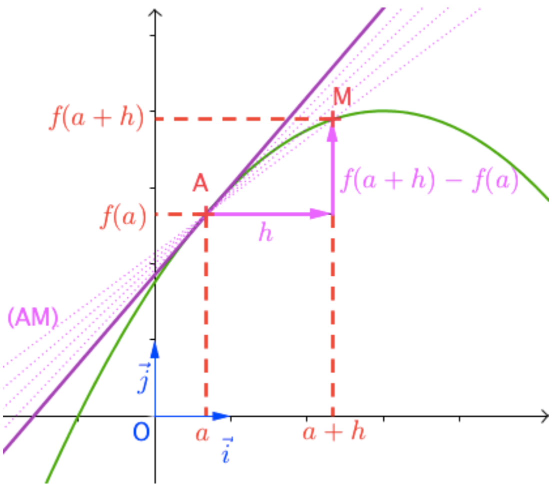
1) Fonction dérivable

Définition : On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel L, tel que : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
L est appelé le **nombre dérivé** de f en a.

2) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
L est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple :
On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$f'(x) = 2x + 3$ donc $f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$
Or, $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$
Donc son équation est de la forme : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit :
$y = 7(x-2) + 9$ soit encore $y = 7x - 5$
Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

3) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

Exemples :
a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{6x}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6e^{6x}$.
b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$.

4) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u + v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$
$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5$
$v(x) = 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3$

Donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3$
$= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x$
$= 18x^2 - 38x + 10$

b) $g(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$
$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$

Donc : $g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$= \frac{6(x^3-2x^2-1)-(6x-5)(3x^2-4x)}{(x^3-2x^2-1)^2}$
$= \frac{6x^3-12x^2-6-18x^3+24x^2+15x^2-20x}{(x^3-2x^2-1)^2}$
$= \frac{-12x^3+27x^2-20x-6}{(x^3-2x^2-1)^2}$

5) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

- Admis -

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.
Résolvons l'équation : $f'(x) \leq 0$
$2x - 4 \leq 0$
$2x \leq 4$
$x \leq 2$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$.

De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

II. Dérivées d'une fonction composée

1) Définition

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/08HgDgD6XL8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x-3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par : $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) = v \circ u\,(x) = v\big(u(x)\big) = \sqrt{x-3}$$

Définition : Soit une fonction u définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit une fonction v définie sur un intervalle K tel que $J \subset K$.
On appelle **fonction composée** de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par : $v \circ u\,(x) = v\big(u(x)\big)$.

Méthode : Composer deux fonctions

Vidéo https://youtu.be/sZ2zqEz4hug

1) On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de x.
2) Même question avec $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$.

1) On a : $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$$v \circ u(x) = v\big(u(x)\big) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$u \circ v(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) On a : $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$

$$v \circ u(x) = v\big(u(x)\big) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$$

$$u \circ v(x) = u\big(v(x)\big) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{x}{x+1}$$

2) Formule de dérivation d'une fonction composée

Propriété : Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J.
Soit une fonction v définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$.
La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $f'(x) = v'\big(u(x)\big) \times u'(x)$
ou encore $f' = v' \circ u \times u'$

Admis

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée (cas général)

Vidéo https://youtu.be/IwcFgnbs0Ew

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v\big(u(x)\big)$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$

Donc : $f'(x) = v'\big(u(x)\big) \times u'(x)$

$= e^{x^2+1} \times 2x$

$= 2xe^{x^2+1}$

3) Cas particuliers de fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$\mathbb{R}$	$u'e^u$

Démonstrations :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$

Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'\big(u(x)\big) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Soit $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

- $(u(x))^n = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$

Donc $((u(x))^n)' = v'\big(u(x)\big) \times u'(x) = n\big(u(x)\big)^{n-1} \times u'(x)$, car $v'(x) = nx^{n-1}$

Soit $((u(x))^n)' = nu'(x)\big(u(x)\big)^{n-1}$

- Démonstration analogue pour « e^u ».

Méthode : Déterminer la dérivée de fonctions composées (cas particuliers)

Vidéo https://youtu.be/kE32Ek8BXvs
Vidéo https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$ b) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$ c) $h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

a) On pose : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x - 1 \rightarrow u'(x) = 6x + 4$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$= \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}}$

$= \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$

b) On pose : $g(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

Donc : $g'(x) = 4u'(x)(u(x))^3$

$= 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$

c) On pose : $h(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Donc : $h'(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$

$= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$

$= -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

4) Étude d'une fonction composée

Méthode : Étudier une fonction composée (1)

Vidéo https://youtu.be/0MwFVTHZdpo
Vidéo https://youtu.be/j-pKLxjHNJw
Vidéo https://youtu.be/7c7HeV8cMvo → difficile, pour experts
Vidéo https://youtu.be/95eLAWaSwwc
Vidéo https://youtu.be/a1Z29PuSQ64
Vidéo https://youtu.be/mM24gzGuWcA

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$

On note C sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C.
3) Étudier les variations de f.
4) Tracer les asymptotes à la courbe C puis la courbe C.

1) La fonction racine carrée est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est définie pour $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{2x}{3x+1}$	$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc la fonction f est définie sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right[\cup [0\,;\,+\infty[$.

2) - <u>Recherche des limites à l'infini :</u>
La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.
Levons l'indétermination :

$$\frac{2x}{3x+1} = \frac{2x}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{3+\frac{1}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x} = 3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$

Et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3}$

On en déduit, comme limite de fonction composée, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On démontre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ainsi, la droite d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ est asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$ et en $-\infty$.

- <u>Recherche de la limite en $-\frac{1}{3}$</u> :

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} 3x+1 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} 2x = -\frac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} \frac{2x}{3x+1} = +\infty$.

Donc, comme limite de fonction composée, on a : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = +\infty$.

En effet : $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, en considérant que $X = \frac{2x}{3x+1}$.

Ainsi la droite d'équation $x = -\frac{1}{3}$ est asymptote verticale à la courbe C.

3) On pose : $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$

$$u'(x) = \frac{2(3x+1)-3\times 2x}{(3x+1)^2}$$
$$= \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2}$$
$$= \frac{2}{(3x+1)^2}$$

Donc :

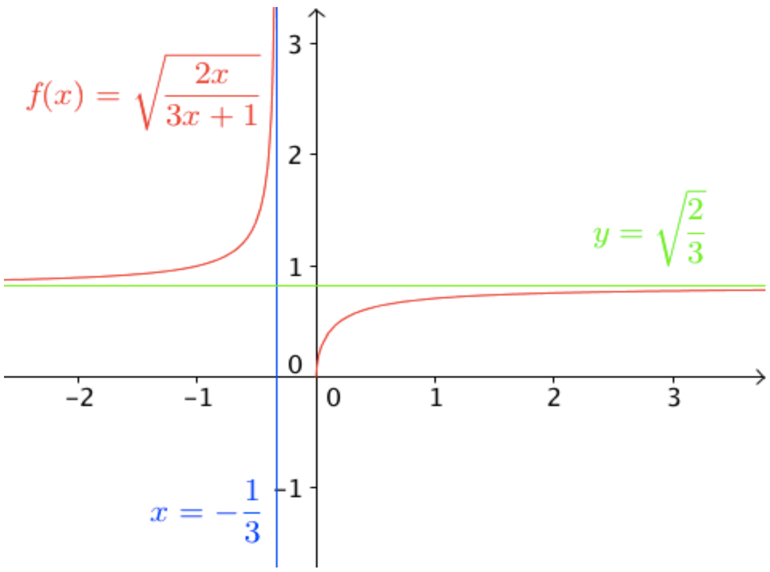
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{2}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} = \frac{\frac{1}{(3x+1)^2}}{\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$$

Et donc $f'(x) > 0$.
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	//////////////////////////////	‖	+	
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	↗	$+\infty$ ‖	//////////////////////////////	‖ 0	↗	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

<u>A noter :</u> On met une double barre pour la dérivée en 0. En effet, si $x = 0$, le dénominateur de la dérivée s'annulerait. La fonction dérivée f' n'est pas définie en 0.

5)



Méthode : Étudier une fonction composée (2)

Vidéo https://youtu.be/I4HkvkpqjNw
Vidéo https://youtu.be/Vx0H1DV3Yqc
Vidéo https://youtu.be/2RIBQ1LiNYU

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.
a) Étudier les limites de f à l'infini.
b) Calculer la dérivée de la fonction f.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

a) - $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{x}{2} = +\infty$, donc comme limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$.
En effet, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ en posant $X = -\frac{x}{2}$.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{-\frac{x}{2}} = -\infty$, comme limite d'un produit.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».
Levons l'indétermination :

$$xe^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 2\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}$$

Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$.
En effet, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, en considérant que $X = \frac{x}{2}$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$, comme inverse de limite.
Et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$
Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-\frac{x}{2}} = 0$.

b) On a :
$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$
En effet : $\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

c) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.
f'est donc positive sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et négative sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

En effet : $f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$

d)