DÉRIVATION

I. Rappels

Vidéos
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoY7qihLa2dHc9-rBgVrgWJ

1) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
$f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A d'abscisse a est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple :
On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.
$f'(x) = 2x + 3$ donc $f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$
Or, $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$
Donc son équation est de la forme : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit :
$y = 7(x-2) + 9$ soit encore $y = 7x - 5$
Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

2) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

Exemples :
a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{6x}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 6e^{6x}$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = -\dfrac{5}{x^6}$.

3) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5$

$v(x) = 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3$

Donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3$

$= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x$

$= 18x^2 - 38x + 10$

b) $g(x) = \dfrac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}$

$g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$

$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$

Donc : $g'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$= \dfrac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}$

$$= \frac{6x^3-12x^2-6-18x^3+24x^2+15x^2-20x}{(x^3-2x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-12x^3+27x^2-20x-6}{(x^3-2x^2-1)^2}$$

4) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

- Admis -

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.
Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.
Résolvons l'équation : $f'(x) \leq 0$
$2x - 4 \leq 0$
$2x \leq 4$
$x \leq 2$
La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$.
De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

II. Dérivée d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
u^2	$2u'u$
e^u	$u'e^u$

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :
a) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^2$ b) $h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

a) On pose : $g(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$
Donc : $g'(x) = 2u'(x)u(x)$
$= 2(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)$

b) On pose : $h(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Donc : $g'(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$

$= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$
$= -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Méthode : Étudier une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/Vx0H1DV3Yqc

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) En déduire les variations de la fonction f.

a) On a :
$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$
En effet : $\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

b) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.
f'est donc positive sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$ et négative sur l'intervalle $[2\,;\, +\infty[$.
f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2\,;\, +\infty[$.