

# CONVEXITÉ

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/gge4xdn6cFA>

## Partie 1 : Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$  dont la dérivée  $f'$  est dérivable sur  $I$ .

On appelle **fonction dérivée seconde** de  $f$  sur  $I$  la dérivée de  $f'$  et on note :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Méthode : Calculer la dérivée seconde d'une fonction

▶ Vidéo <https://youtu.be/W6rypabq8uA>

Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$$

$$g(x) = xe^x$$

**Correction**

- $f'(x) = 9x^2 - 10x$

$$f''(x) = (f'(x))' = 18x - 10$$

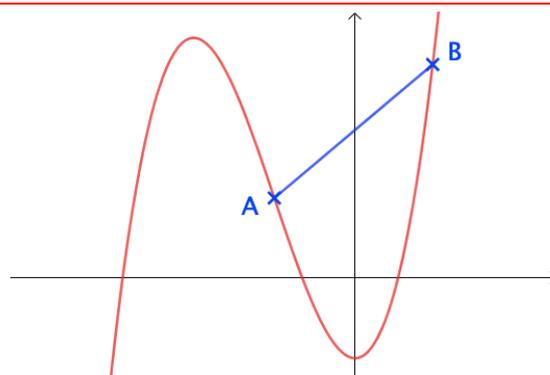
- $g'(x) = 1 \times e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$$g''(x) = e^x(1 + x) + e^x \times 1 = e^x(2 + x)$$

## Partie 2 : Fonction convexe et fonction concave

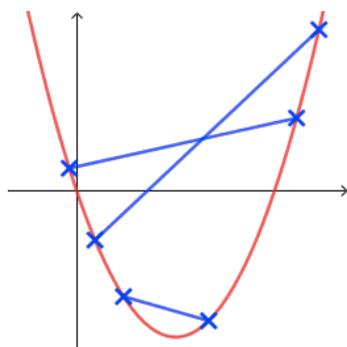
### 1) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

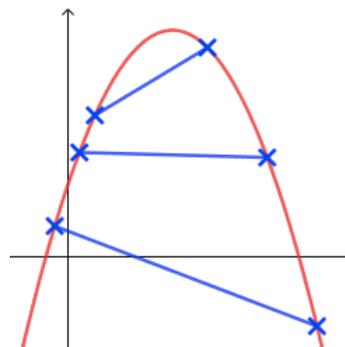


Définitions : Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

- La fonction  $f$  est **convexe** sur  $I$ , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
- La fonction  $f$  est **concave** sur  $I$ , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



Fonction convexe

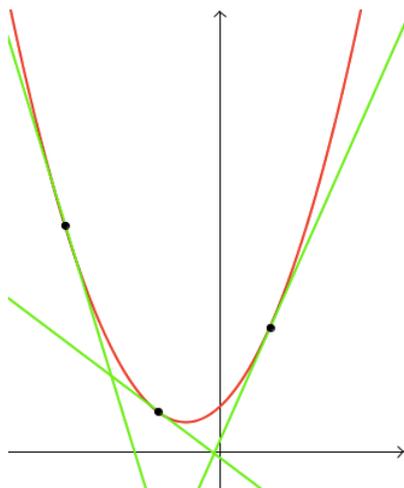


Fonction concave

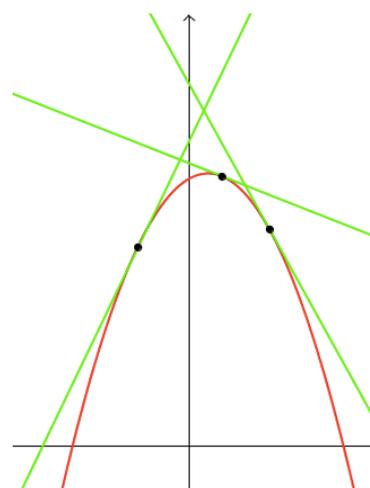
## 2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- La fonction  $f$  est **convexe** sur  $I$ , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction  $f$  est **concave** sur  $I$ , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



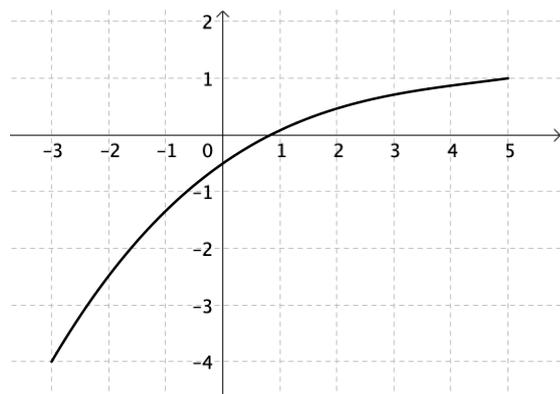
Fonction concave

Méthode : Reconnaître graphiquement la convexité

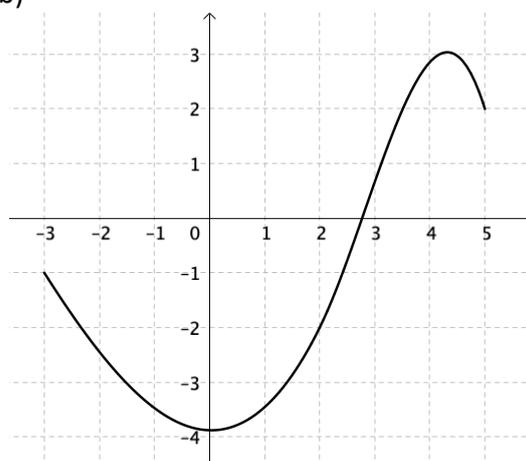
▶ Vidéo [https://youtu.be/ERML85y\\_s6E](https://youtu.be/ERML85y_s6E)

Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l'intervalle  $[-3 ; 5]$ .

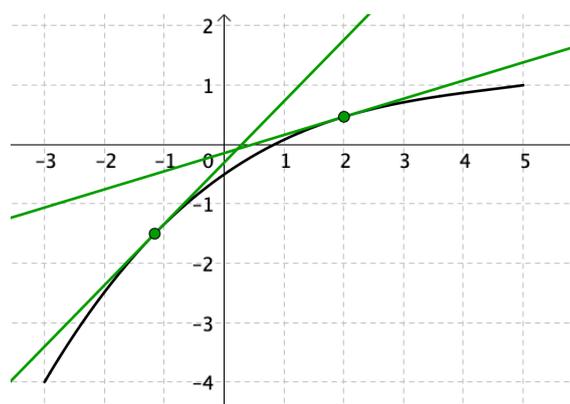
a)



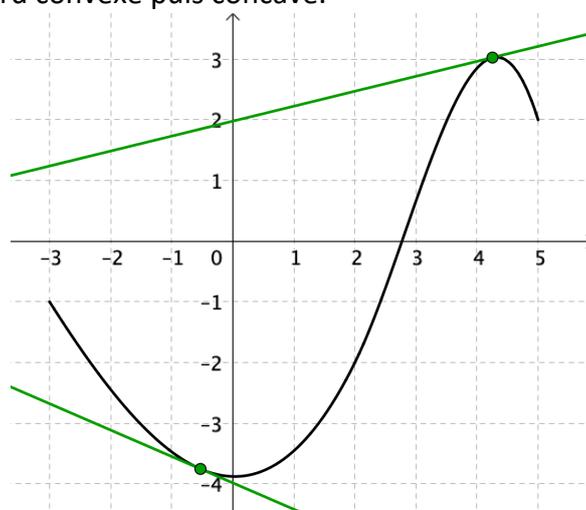
b)

**Correction**

a) La fonction est concave. Sa courbe est en effet entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



b) La fonction est d'abord convexe puis concave.



Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

### 3) Propriétés

#### Propriétés :

- La fonction carré  $x \mapsto x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction cube  $x \mapsto x^3$  est concave sur  $]-\infty ; 0]$  et convexe sur  $[0 ; +\infty[$ .
- La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est concave sur  $]-\infty ; 0[$  et convexe sur  $]0 ; +\infty[$ .
- La fonction racine carrée  $x \mapsto \sqrt{x}$  est concave sur  $[0 ; +\infty[$ .

#### Propriété :

Soit une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Dire que la fonction  $f$  est convexe sur  $I$ , revient à dire que sa dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ , soit :  $f''(x) \geq 0$ .
- Dire que la fonction  $f$  est concave sur  $I$ , revient à dire que sa dérivée  $f'$  est décroissante sur  $I$ , soit :  $f''(x) \leq 0$ .

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d'une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

#### Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

▶ Vidéo <https://youtu.be/8H2aYKN8NGE>

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$ .

Étudier la convexité de la fonction  $f$ .

#### Correction

$$f'(x) = x^2 - 18x.$$

$$f''(x) = 2x - 18$$

On a :  $f''(x) = 0$  pour  $x = 9$ .

Pour tout  $x \leq 9$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

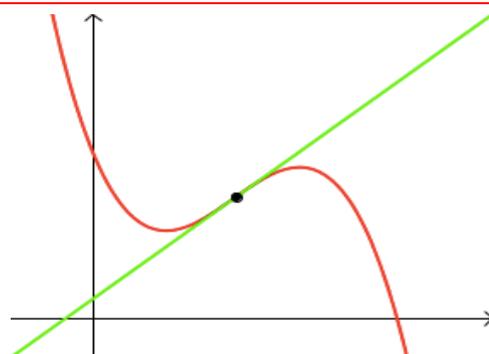
Pour tout  $x \geq 9$ ,  $f''(x) \geq 0$ .

Donc  $f$  est concave sur  $]-\infty ; 9]$  et  $f$  est convexe sur  $[9 ; +\infty[$ .

### Partie 3 : Point d'inflexion

Définition : Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente.



**Propriété :** Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

**Exemple :**

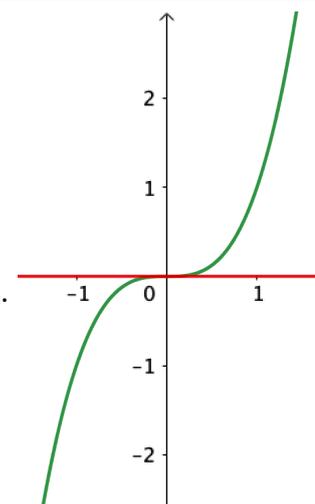
On considère la fonction cube  $x \mapsto x^3$ .  
La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour  $x \leq 0$ , la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour  $x \geq 0$ , la courbe est au-dessus de sa tangente.

L'origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.

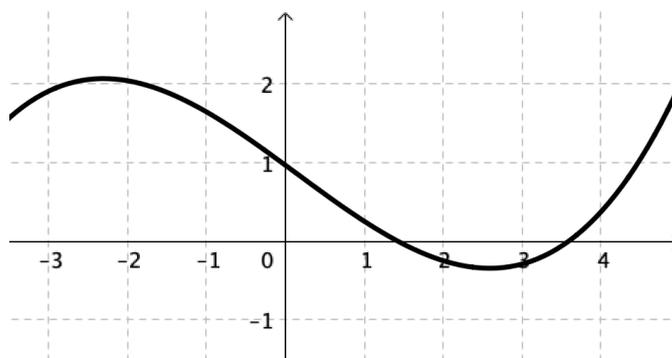


**Méthode :** Reconnaître graphiquement un point d'inflexion

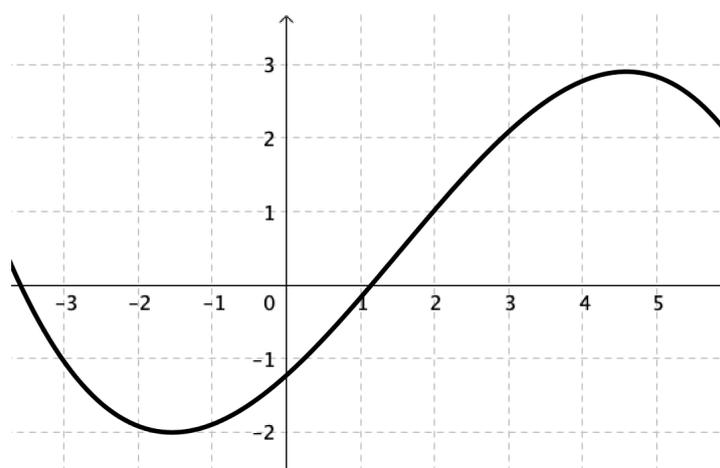
 Vidéo <https://youtu.be/r8sYr6ToeLo>

Déterminer graphiquement le point d'inflexion des fonctions représentées ci-dessous.

a)

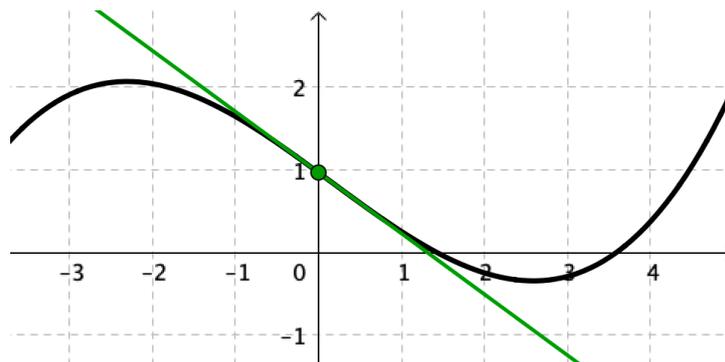


b)

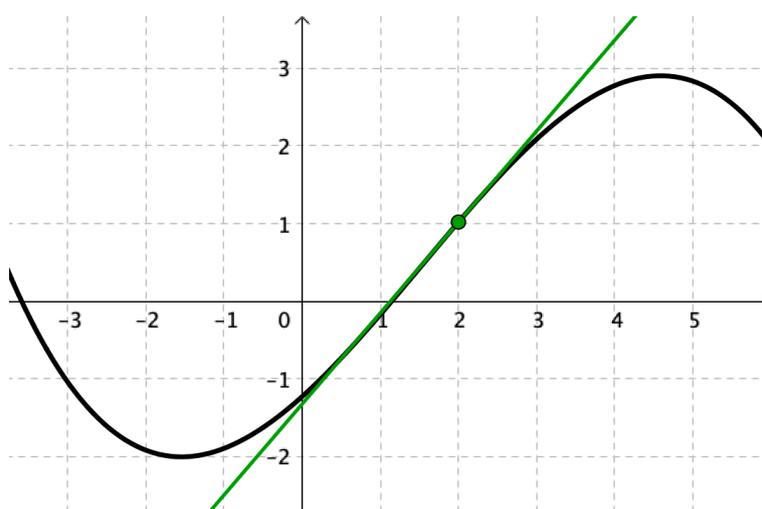


**Correction**

a) La fonction est d'abord concave puis convexe. Le point de coordonnées (0 ; 1) semble être un point d'inflexion de la courbe.



b) La fonction est d'abord convexe puis concave. Le point de coordonnées (2 ; 1) semble être un point d'inflexion de la courbe.



**Méthode :** Étudier la convexité pour résoudre un problème

**Vidéo** [https://youtu.be/ XlgCeLcN1k](https://youtu.be/XlgCeLcN1k)

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

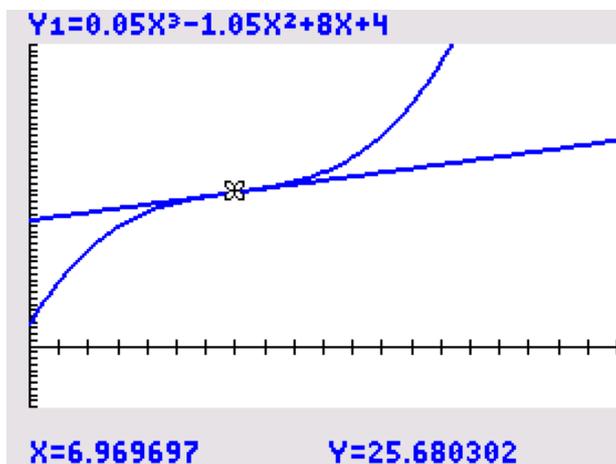
Le coût de fabrication  $C$  (en milliers d'euros) de  $x$  milliers de clés produites s'exprime par :

$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$ , définie sur l'intervalle  $[0 ; 10]$ .

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction  $C$ .  
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
- 2) Démontrer ces résultats.
- 3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

**Correction**

1) La fonction semble concave sur l'intervalle  $[0 ; 7]$  et convexe sur l'intervalle  $[7 ; 10]$ . La courbe semble posséder un point d'inflexion pour  $x = 7$ .



$$2) \begin{aligned} C(x) &= 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4 \\ C'(x) &= 0,15x^2 - 2,1x + 8 \\ C''(x) &= 0,3x - 2,1 \end{aligned}$$

Or,  $0,3x - 2,1 = 0$  pour  $x = 7$ .

On peut ainsi résumer les variations de  $C'$  et la convexité de  $C$  dans le tableau suivant :

$x$	0	7	10	
$C''(x)$		-	0	+
$C'(x)$		↘ ↗		
Convexité de $C$		concave	convexe	

$$C(7) = 25,7$$

Ainsi, le point de coordonnées  $(7 ; 25,7)$  est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication  $C$  ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Ainsi, à partir de 7 000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

### Méthode : Étudier une fonction

▶ Vidéo <https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo>

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ .

- Calculer la dérivée de la fonction  $f$ .
- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  en s'aidant de la calculatrice.
- Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.
- Démontrer que  $f''(x) = \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$ .
- En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

### Correction

$$a) f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

b) Comme  $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $1 - \frac{x}{2}$ .

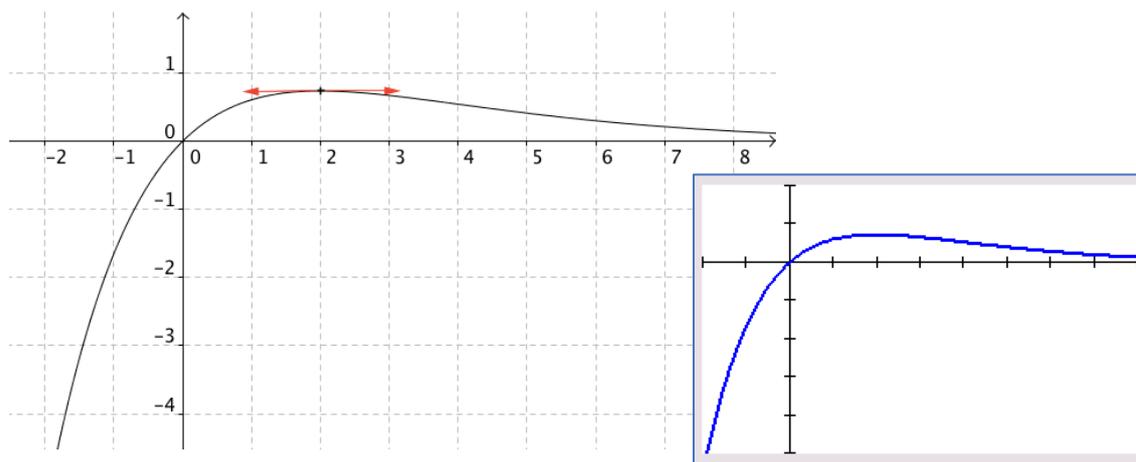
$f$  est donc croissante sur l'intervalle  $]-\infty ; 2]$  et décroissante sur l'intervalle  $[2 ; +\infty[$ .

On dresse le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$			

$$f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

c)



d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

$$\begin{aligned} \text{e) } f''(x) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}} \\ &= -e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

f) Comme  $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ ,  $f''(x)$  est du signe de  $\frac{x}{4} - 1$ .

Donc  $f''(x) \geq 0$  pour  $\frac{x}{4} - 1 \geq 0$  soit  $x \geq 4$ .

$f''(x) \leq 0$  pour  $\frac{x}{4} - 1 \leq 0$  soit  $x \leq 4$ .

Ainsi  $f'$  est croissante sur  $[4 ; +\infty[$  et donc  $f$  est convexe sur cet intervalle.

$f'$  est décroissante sur  $]-\infty ; 4]$  et donc  $f$  est concave sur cet intervalle.

On en déduit que la courbe représentative de  $f$  possède un point d'inflexion d'abscisse 4.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – [www.maths-et-tiques.fr](http://www.maths-et-tiques.fr)