# CONVEXITÉ

**Tout le cours en vidéo :** https://youtu.be/gge4xdn6cFA

## Partie 1 : Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle $I$ dont la dérivée $f'$ est dérivable sur $I$.
On appelle **fonction dérivée seconde** de $f$ sur $I$ la dérivée de $f'$ et on note :
$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Méthode : Calculer la dérivée seconde d'une fonction

**Vidéo** https://youtu.be/W6rypabq8uA

Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions $f$ et $g$ définies par :
$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$
$g(x) = xe^x$

**Correction**

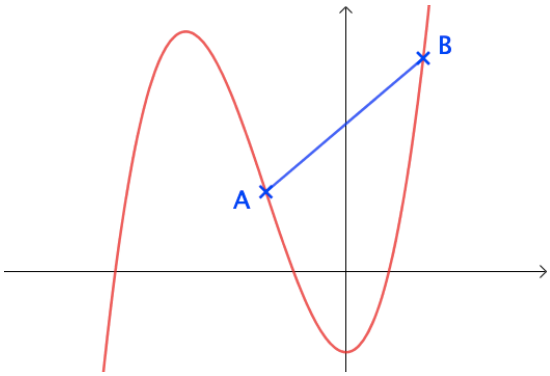
- $f'(x) = 9x^2 - 10x$
  $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 18x - 10$

- $g'(x) = 1 \times e^x + xe^x = e^x(1 + x)$
  $g''(x) = e^x(1 + x) + e^x \times 1 = e^x(2 + x)$

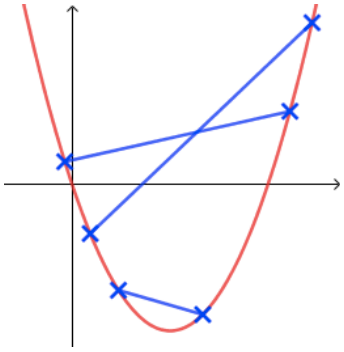
## Partie 2 : Fonction convexe et fonction concave

1) Définitions avec les cordes

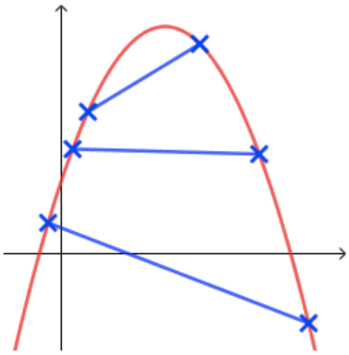
Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.



Définitions : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$.
- La fonction $f$ est **convexe** sur $I$, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
- La fonction $f$ est **concave** sur $I$, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



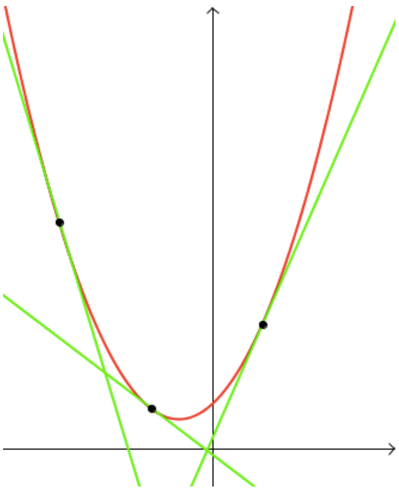
Fonction convexe



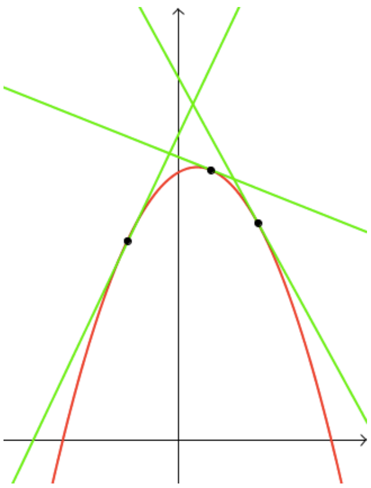
Fonction concave

2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle $I$.
- La fonction $f$ est **convexe** sur $I$, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction $f$ est **concave** sur $I$, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



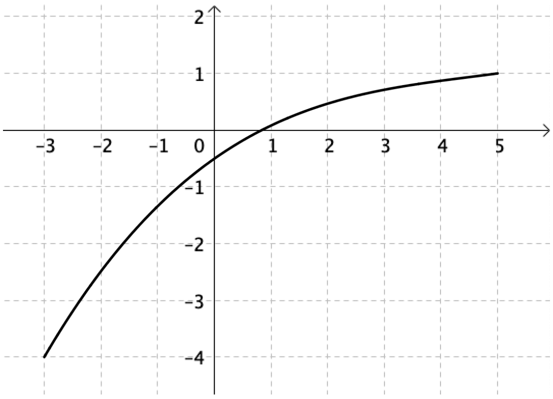
Fonction concave

Méthode : Reconnaître graphiquement la convexité

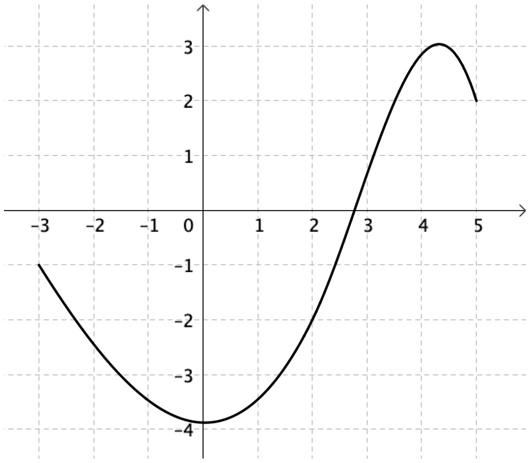
**Vidéo** https://youtu.be/ERML85y_s6E

Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l'intervalle $[-3\ ;\ 5]$.

a)

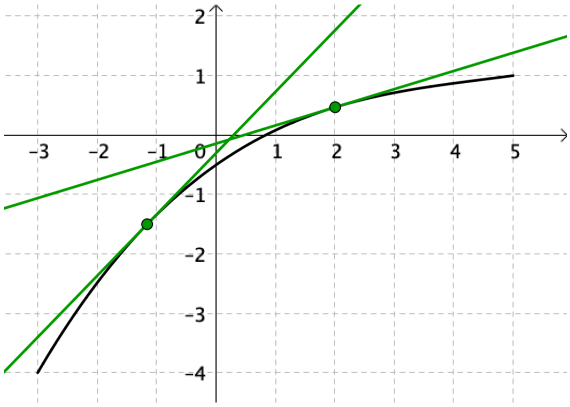



b)

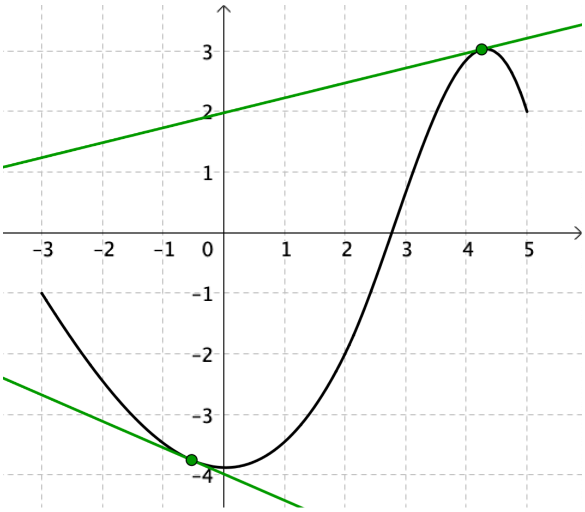



**Correction**

a) La fonction est concave. Sa courbe est en effet entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.




b) La fonction est d'abord convexe puis concave.




<u>Remarque :</u> On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

3) Propriétés

Propriétés :
- La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

Propriété :
Soit une fonction $f$ définie et dérivable sur un intervalle $I$.
- Dire que la fonction $f$ est convexe sur $I$, revient à dire que sa dérivée $f'$ est croissante sur $I$, soit : $f''(x) \geq 0$.
- Dire que la fonction $f$ est concave sur $I$, revient à dire que sa dérivée $f'$ est décroissante sur $I$, soit : $f''(x) \leq 0$.

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d'une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

**Vidéo** https://youtu.be/8H2aYKN8NGE

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
Étudier la convexité de la fonction $f$.

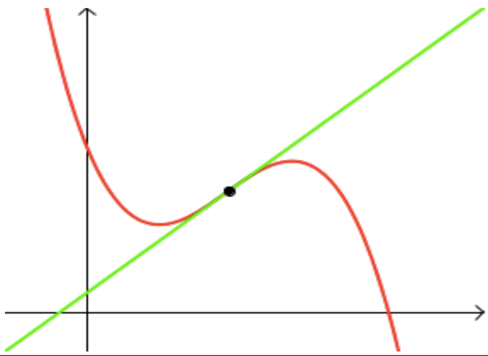
**Correction**
$f'(x) = x^2 - 18x$.
$f''(x) = 2x - 18$
On a : $f''(x) = 0$ pour $x = 9$.

Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$.
Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.

Donc $f$ est concave sur $]-\infty\,;9]$ et $f$ est convexe sur $[9\,;\,+\infty[$.

## Partie 3 : Point d'inflexion

Définition : Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle $I$.
Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente.

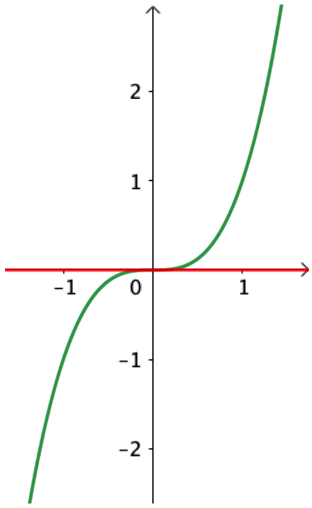


Propriété : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :
On considère la fonction cube $x \longmapsto x^3$.
La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.
L'origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.

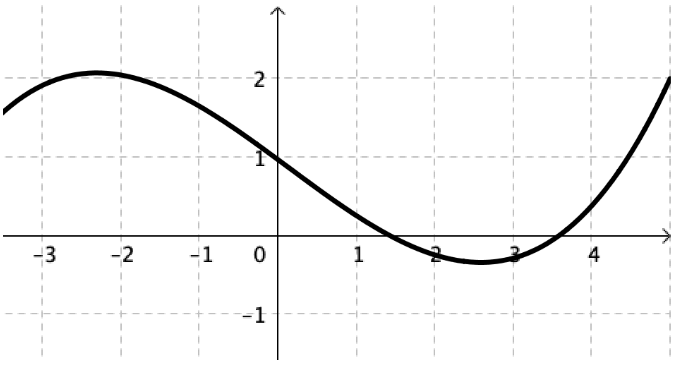



Méthode : Reconnaître graphiquement un point d'inflexion

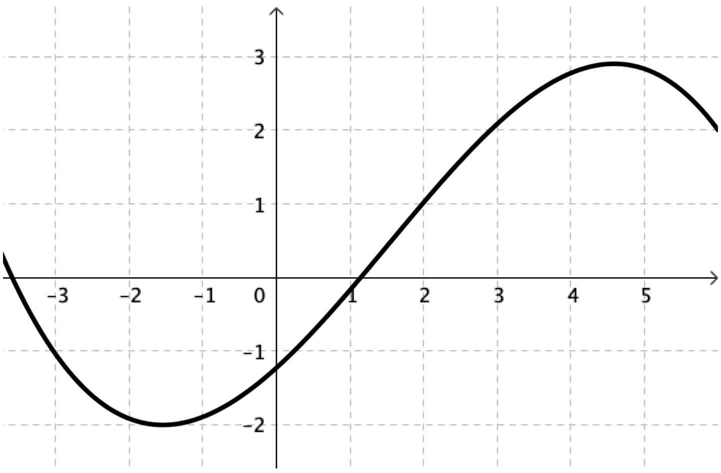
**Vidéo** https://youtu.be/r8sYr6ToeLo

Déterminer graphiquement le point d'inflexion des fonctions représentées ci-dessous.

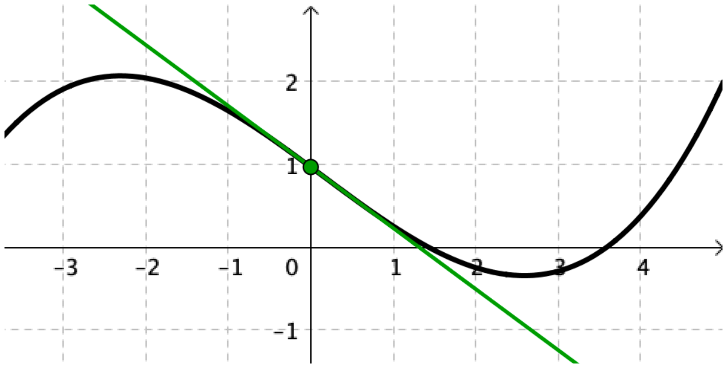
a)



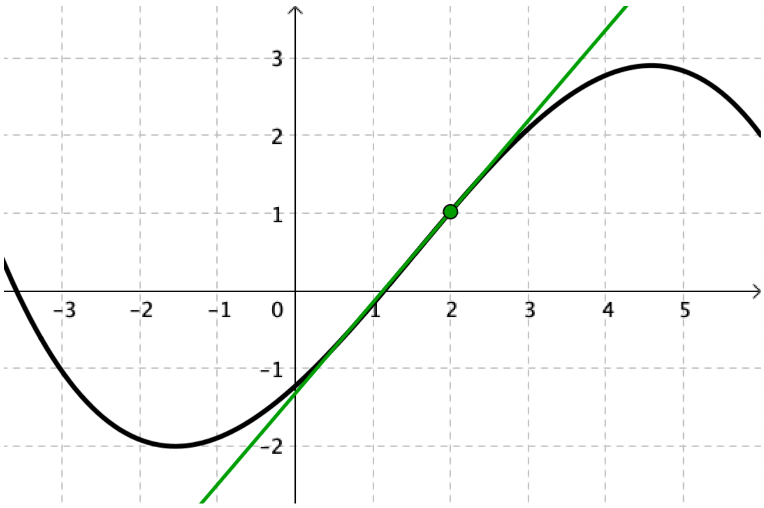

b)



**Correction**
a) La fonction est d'abord concave puis convexe. Le point de coordonnées (0 ; 1) semble être un point d'inflexion de la courbe.




b) La fonction est d'abord convexe puis concave. Le point de coordonnées (2 ; 1) semble être un point d'inflexion de la courbe.



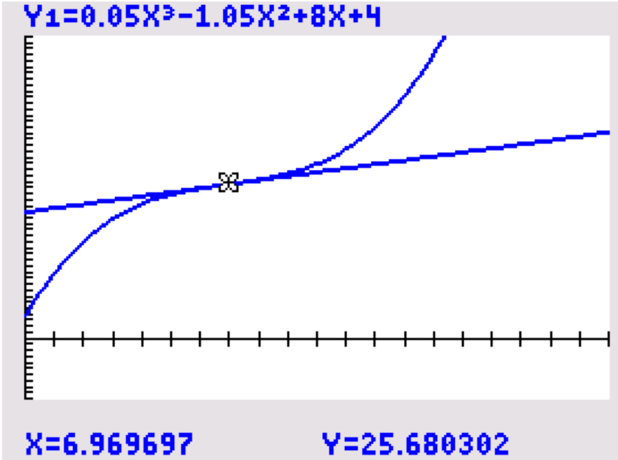

Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

**Vidéo** **https://youtu.be/_XlgCeLcN1k**

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication $C$ (en milliers d'euros) de $x$ milliers de clés produites s'exprime par :
$C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$, définie sur l'intervalle [0 ; 10].

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction $C$.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

**Correction**
1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle [7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.




2) $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$
$C'(x) = 0{,}15x^2 - 2{,}1x + 8$
$C''(x) = 0{,}3x - 2{,}1$

Or, $0{,}3x - 2{,}1 = 0$ pour $x = 7$.
On peut ainsi résumer les variations de $C'$ et la convexité de $C$ dans le tableau suivant :

| $x$ | 0 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|
| $C''(x)$ | − | 0 | + |
| $C'(x)$ | ↘ | | ↗ |
| Convexité de $C$ | concave | | convexe |

$C(7) = 25{,}7$
Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication $C$ ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.
Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Étudier une fonction

**Vidéo** https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction $f$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
c) Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ en s'aidant de la calculatrice.
d) Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.
e) Démontrer que $f"(x) = \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$.
f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

**Correction**
a) $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

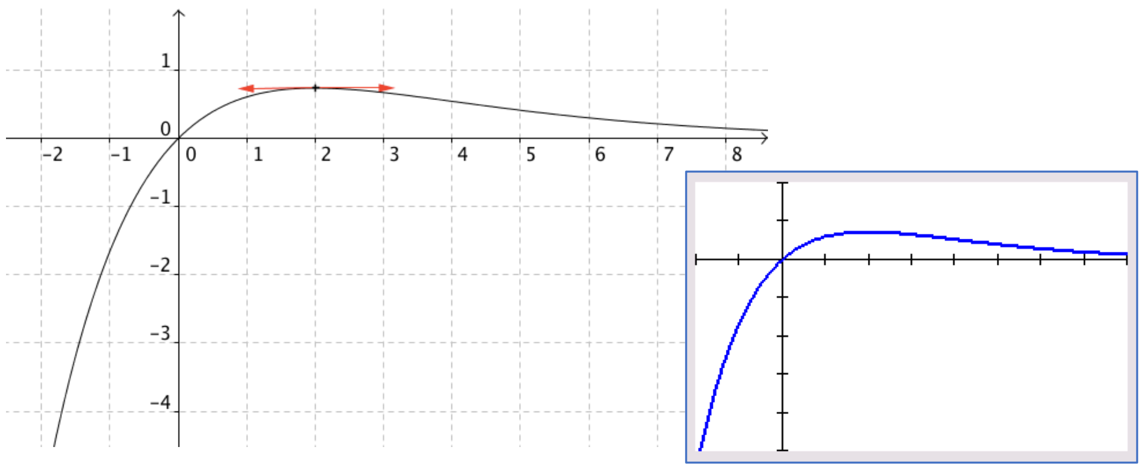
b) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.
$f$ est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{2}{e}$ | $\searrow$ | |

$$f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

c)




d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

$$\begin{aligned} \text{e) } f''(x) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}} \\ &= -e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

f) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $\frac{x}{4} - 1$.
Donc $f''(x) \geq 0$ pour $\frac{x}{4} - 1 \geq 0$ soit $x \geq 4$.
$f''(x) \leq 0$ pour $\frac{x}{4} - 1 \leq 0$ soit $x \leq 4$.
Ainsi $f'$ est croissante sur $[4\,;\,+\infty[$ et donc $f$ est convexe sur cet intervalle.
$f'$ est décroissante sur $]-\infty\,;4]$ et donc $f$ est concave sur cet intervalle.
On en déduit que la courbe représentative de $f$ possède un point d'inflexion d'abscisse 4.