CONVEXITÉ

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/gge4xdn6cFA**](https://youtu.be/gge4xdn6cFA)

**Partie 1 : Dérivée seconde**

Définition : Soit une fonction $f$dérivable sur un intervalle $I$ dont la dérivée $f'$ est dérivable sur $I$.

On appelle **fonction dérivée seconde** de $f$ sur $I$ la dérivée de $f'$et on note :

$f^{''}\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)^{'}$.

Méthode : Calculer la dérivée seconde d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/W6rypabq8uA**](https://youtu.be/W6rypabq8uA)

Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions $f$ et $g$ définies par :

$f\left(x\right)=3x^{3}-5x^{2}+1$

$$g\left(x\right)=xe^{x}$$

**Correction**

● $f'\left(x\right)=9x^{2}-10x$

 $f''\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)'=18x-10$

●$ g^{'}(x)=1×e^{x}+xe^{x}=e^{x}(1+x)$

 $g^{''}\left(x\right)=e^{x}\left(1+x\right)+e^{x}×1=e^{x}(2+x)$

**Partie 2 : Fonction convexe et fonction concave**

 1) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux

points d'une courbe.

Définitions : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$.

- La fonction $f$ est **convexe** sur $I$, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction $f$ est **concave** sur $I$, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



Fonction convexe Fonction concave

 2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle $I$.

- La fonction $f$ est **convexe** sur $I$, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

- La fonction $f$ est **concave** sur $I$, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



 Fonction convexe Fonction concave

Méthode : Reconnaître graphiquement la convexité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ERML85y\_s6E**](https://youtu.be/ERML85y_s6E)

Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l’intervalle $[-3 ; 5]$.

a) b)

 

**Correction**

a) La fonction est concave. Sa courbe est en effet entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



b) La fonction est d’abord convexe puis concave.



Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

3) Propriétés

Propriétés :

- La fonction carré $x⟼x^{2}$ est convexe sur $R$.

- La fonction cube $x⟼x^{3}$ est concave sur $\left]-\infty ;0\right]$ et convexe sur $\left[0 ; +\infty \right[$.

- La fonction inverse $x⟼$ $\frac{1}{x}$ est concave sur $\left]-\infty ;0\right[$ et convexe sur $\left]0 ; +\infty \right[$.

- La fonction racine carrée $x⟼\sqrt{x}$ est concave sur $\left[0 ; +\infty \right[$.

Propriété :

Soit une fonction $f$ définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$.

- Dire que la fonction $f$ est convexe sur $I$, revient à dire que sa dérivée $f'$ est croissante sur $I$, soit : $f''(x)\geq 0$.

- Dire que la fonction $f$ est concave sur $I$, revient à dire que sa dérivée $f'$ est décroissante sur $I$, soit : $f''(x)\leq 0$.

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d’une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

Méthode : Étudier la convexité d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8H2aYKN8NGE**](https://youtu.be/8H2aYKN8NGE)

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-9x^{2}+4$.

Étudier la convexité de la fonction $f$.

**Correction**

$f'\left(x\right)=x^{2}-18x$.

$f''\left(x\right)=2x-18$

On a : $f^{''}\left(x\right)=0 $pour $x=9.$

Pour tout $x\leq 9$, $f''\left(x\right)\leq 0$.

Pour tout $x\geq 9$, $f''\left(x\right)\geq 0$.

Donc $f$ est concave sur $\left]-\infty ;9\right]$ et $f$ est convexe sur $\left[9 ; +\infty \right[$.

**Partie 3 : Point d'inflexion**

Définition : Soit une fonction $f$ dérivable sur

un intervalle $I$.

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe

traverse sa tangente.

Propriété : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.



Exemple :

On considère la fonction cube $x⟼x^{3}$.

La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour $x\leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour $x\geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

L’origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.

Méthode : Reconnaître graphiquement un point d’inflexion

 **Vidéo** [**https://youtu.be/r8sYr6ToeLo**](https://youtu.be/r8sYr6ToeLo)

Déterminer graphiquement le point d’inflexion des fonctions représentées ci-dessous.

a)



b)



**Correction**

a) La fonction est d’abord concave puis convexe. Le point de coordonnées (0 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.



b) La fonction est d’abord convexe puis concave. Le point de coordonnées (2 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.



Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_XlgCeLcN1k**](https://youtu.be/_XlgCeLcN1k)

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication $C$ (en milliers d'euros) de $x$ milliers de clés produites s'exprime par :

$C\left(x\right)=0,05x^{3}-1,05x^{2}+8x+4$, définie sur l’intervalle [0 ; 10].

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction $C$.

En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

2) Démontrer ces résultats.

3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l’exercice.

**Correction**

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle

[7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x=7$.



2) $C\left(x\right)=0,05x^{3}-1,05x^{2}+8x+4$

 $C'\left(x\right)=0,15x^{2}-2,1x+8$

 $C''\left(x\right)=0,3x-2,1$

Or, $0,3x-2,1=0$ pour $x=7$.

On peut ainsi résumer les variations de $C'$ et la convexité de $C$dans le tableau suivant :

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | 0 7 10 |
| $$C''\left(x\right)$$ |  $-$ O + |
| $$C'\left(x\right)$$ |  |
| Convexité de $C$ |  concave convexe |

$$C\left(7\right)=25,7$$

Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication $C$ ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Ainsi, à partir de 7 000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Étudier une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo**](https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo)

Soit $f$ la fonction définie sur $R$ par $f\left(x\right)=xe^{-\frac{x}{2}}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction $f$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

c) Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ en s'aidant de la calculatrice.

d) Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.

e) Démontrer que $f"\left(x\right)=\left(\frac{x}{4}-1\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

**Correction**

a) $f^{'}(x)=e^{-\frac{x}{2}}+x×\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}=\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

b) Comme $e^{-\frac{x}{2}}>0$, $f^{'}(x)$ est du signe de $1-\frac{x}{2}$.

$f$ est donc croissante sur l'intervalle $\left]-\infty ;2\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[2 ; +\infty \right[$.

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | $-\infty $ 2 +$\infty $ |
| $$f^{'}(x)$$ |  + O –  |
| $$f(x)$$ |  $\frac{2}{e}$ |

$$f\left(2\right)=2e^{-\frac{2}{2}}=2e^{-1}=\frac{2}{e}$$



c)



d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

e) $f"\left(x\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

 $=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

 $=-e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

 $=\left(\frac{x}{4}-1\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

f) Comme $e^{-\frac{x}{2}}>0$, $f"\left(x\right)$ est du signe de $\frac{x}{4}-1$.

Donc $f"\left(x\right)\geq 0$ pour $\frac{x}{4}-1\geq 0$ soit $x\geq 4$.

$f"\left(x\right)\leq 0$ pour $\frac{x}{4}-1\leq 0$ soit $x\leq 4$.

Ainsi $f’$ est croissante sur $\left[4 ; +\infty \right[$ et donc *f* est convexe sur cet intervalle.

$f’$ est décroissante sur $\left]-\infty ;4\right]$ et donc *f* est concave sur cet intervalle.

On en déduit que la courbe représentative de *f* possède un point d'inflexion d'abscisse 4.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)