CONVEXITÉ

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/gge4xdn6cFA**](https://youtu.be/gge4xdn6cFA)

**Partie 1 : Dérivée seconde**

Définition : Soit une fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est dérivable sur .

On appelle **fonction dérivée seconde** de sur la dérivée de et on note :

.

Méthode : Calculer la dérivée seconde d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/W6rypabq8uA**](https://youtu.be/W6rypabq8uA)

Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions et définies par :

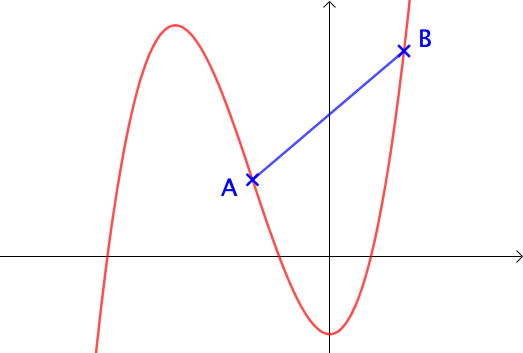
**Correction**

●

●

**Partie 2 : Fonction convexe et fonction concave**

1) Définitions avec les cordes

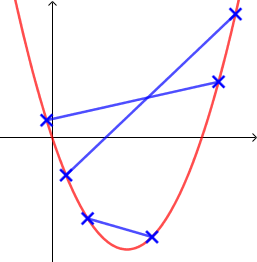
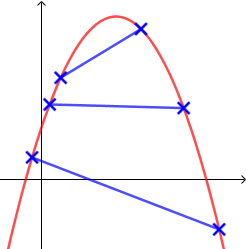
Définition : Une **corde** est un segment reliant deux

points d'une courbe.

Définitions : Soit une fonction définie sur un intervalle .

- La fonction est **convexe** sur , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction est **concave** sur , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



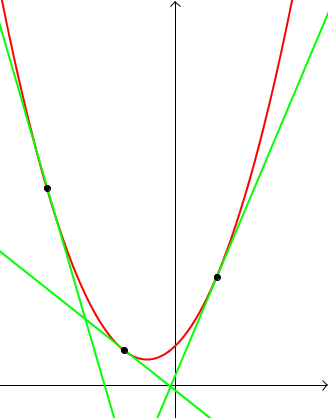
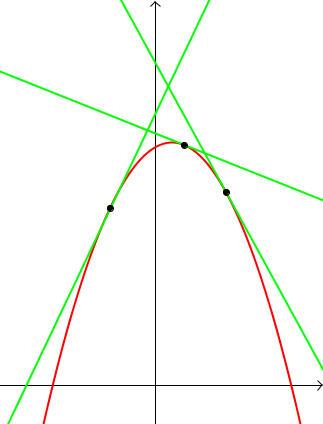
Fonction convexe Fonction concave

2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction dérivable sur un intervalle .

- La fonction est **convexe** sur , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

- La fonction est **concave** sur , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



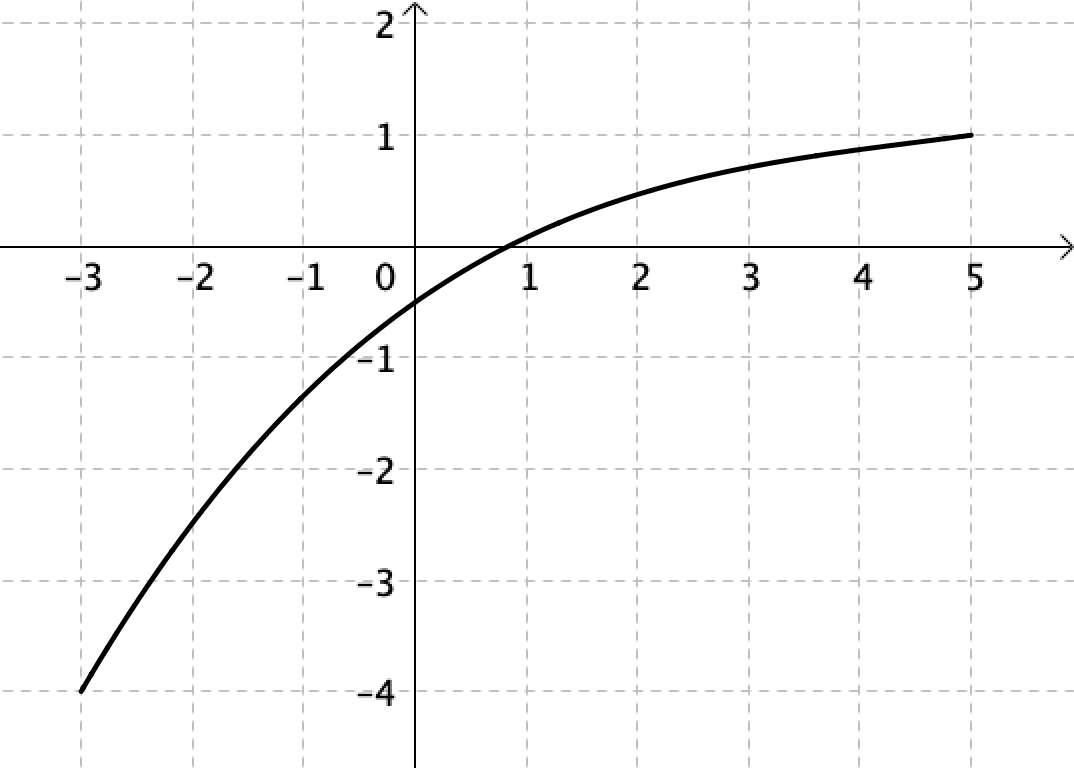
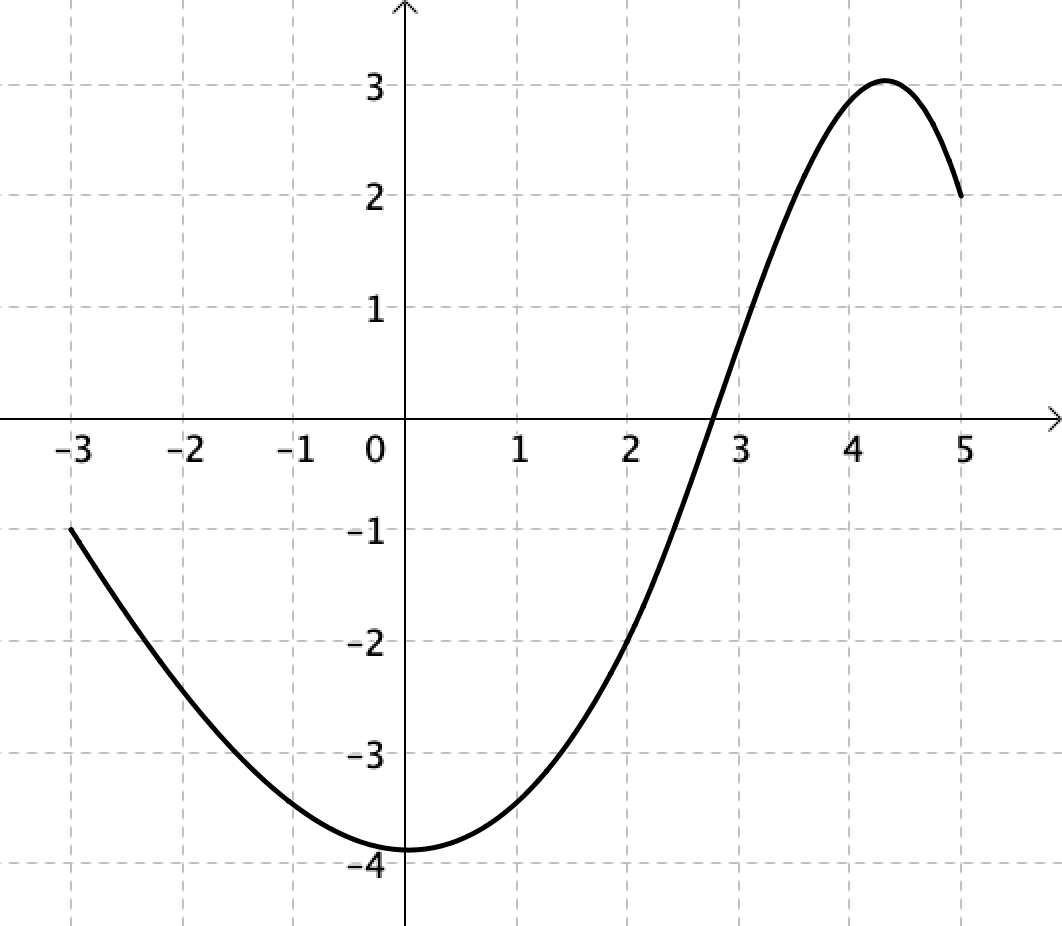
Fonction convexe Fonction concave

Méthode : Reconnaître graphiquement la convexité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ERML85y\_s6E**](https://youtu.be/ERML85y_s6E)

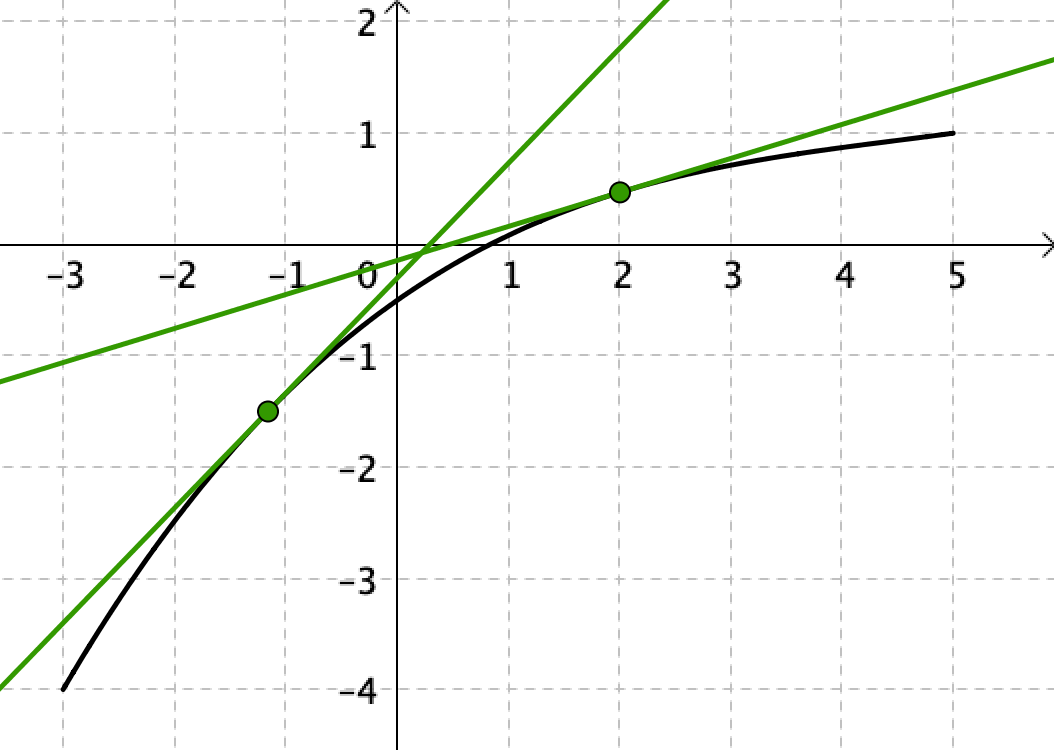
Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l’intervalle .

a) b)

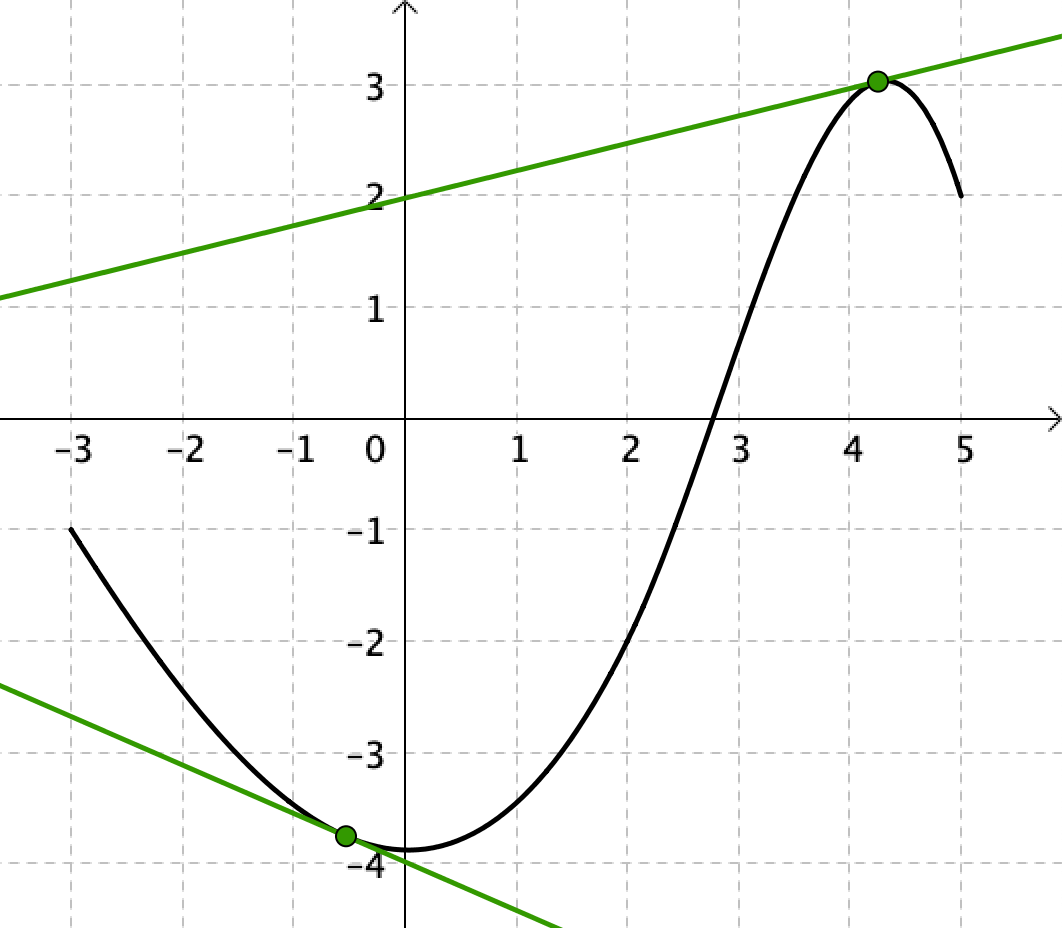
 

**Correction**

a) La fonction est concave. Sa courbe est en effet entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



b) La fonction est d’abord convexe puis concave.



Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

3) Propriétés

Propriétés :

- La fonction carré est convexe sur .

- La fonction cube est concave sur et convexe sur .

- La fonction inverse est concave sur et convexe sur .

- La fonction racine carrée est concave sur .

Propriété :

Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle .

- Dire que la fonction est convexe sur , revient à dire que sa dérivée est croissante sur , soit : .

- Dire que la fonction est concave sur , revient à dire que sa dérivée est décroissante sur , soit : .

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d’une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

Méthode : Étudier la convexité d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8H2aYKN8NGE**](https://youtu.be/8H2aYKN8NGE)

Soit la fonction définie sur par .

Étudier la convexité de la fonction .

**Correction**

.

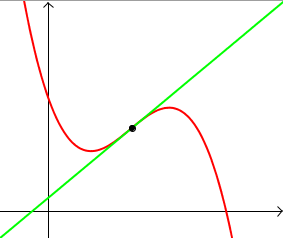
On a : pour

Pour tout , .

Pour tout , .

Donc est concave sur et est convexe sur .

**Partie 3 : Point d'inflexion**

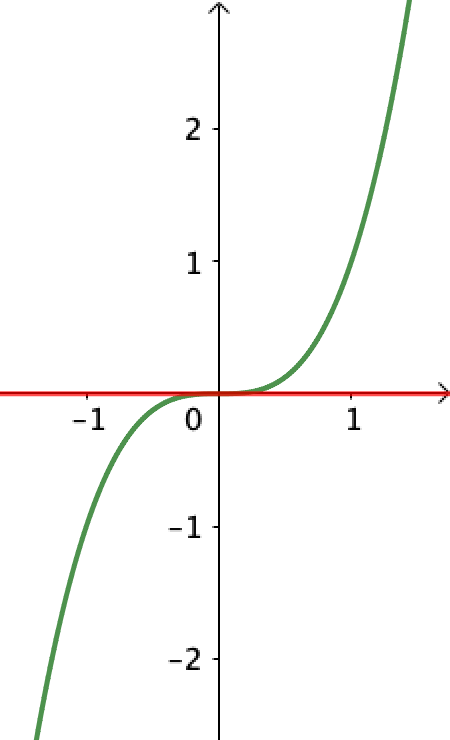
Définition : Soit une fonction dérivable sur

un intervalle .

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe

traverse sa tangente.

Propriété : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.



Exemple :

On considère la fonction cube .

La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour , la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour , la courbe est au-dessus de sa tangente.

L’origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

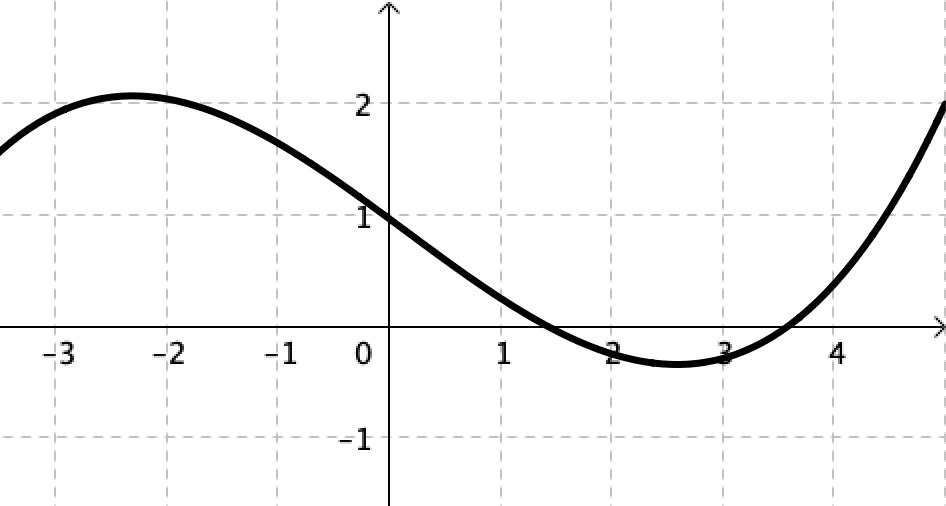
La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.

Méthode : Reconnaître graphiquement un point d’inflexion

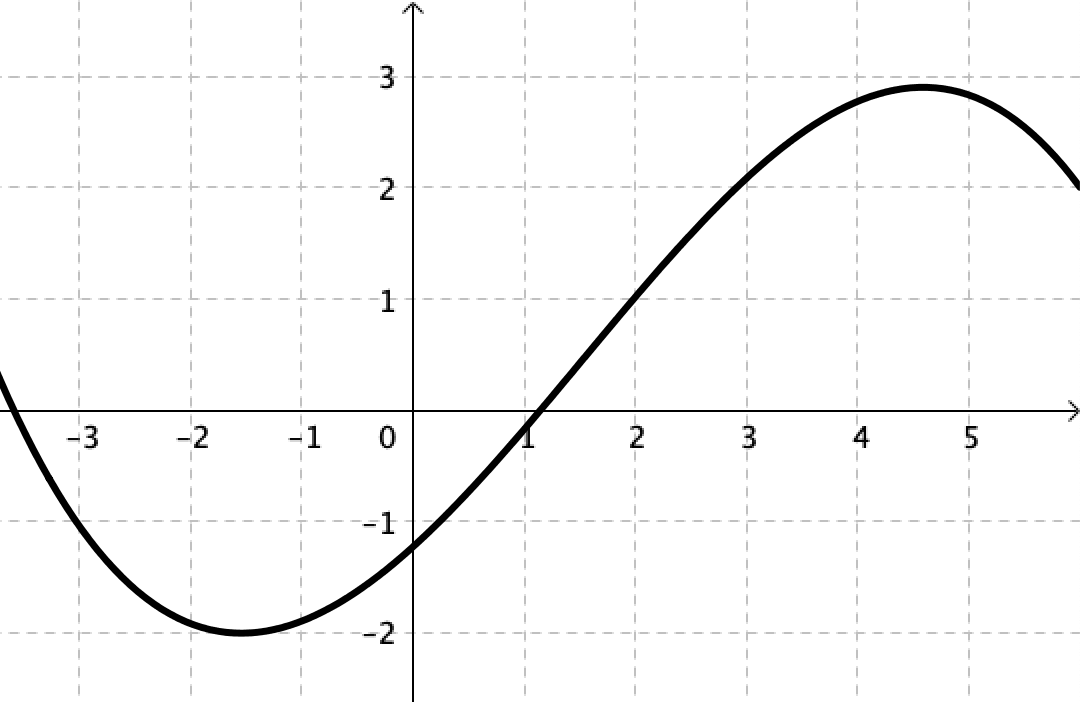
 **Vidéo** [**https://youtu.be/r8sYr6ToeLo**](https://youtu.be/r8sYr6ToeLo)

Déterminer graphiquement le point d’inflexion des fonctions représentées ci-dessous.

a)

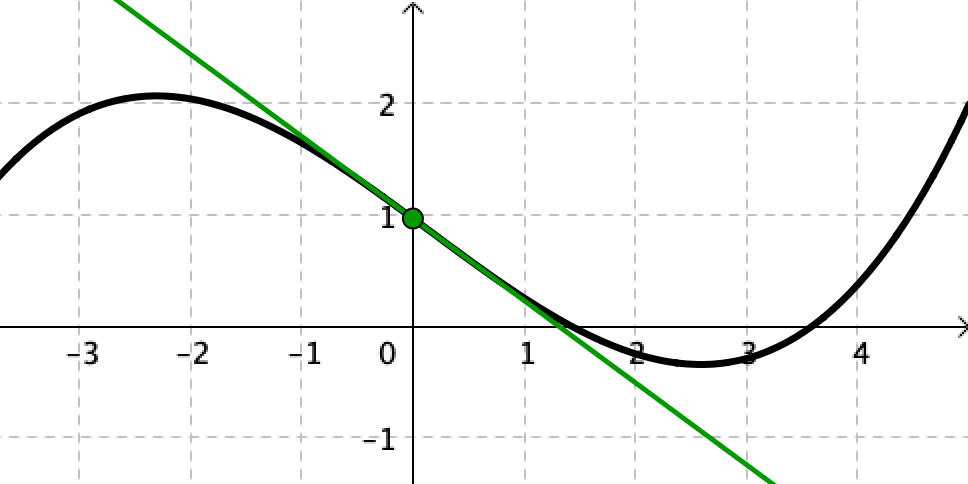


b)

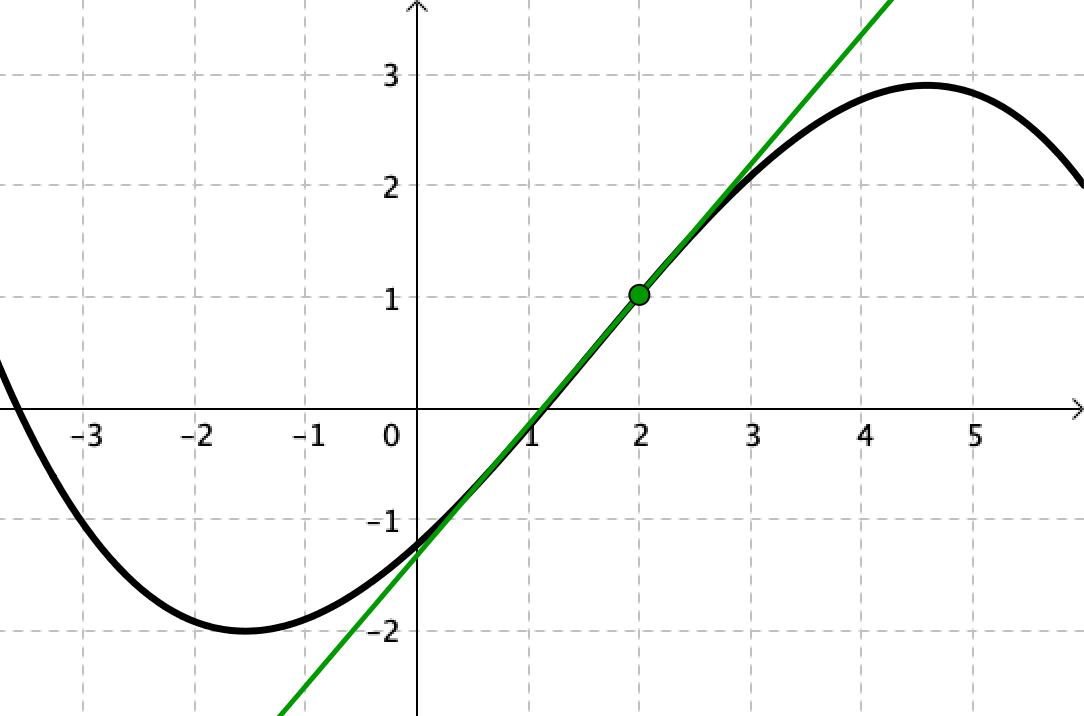


**Correction**

a) La fonction est d’abord concave puis convexe. Le point de coordonnées (0 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.



b) La fonction est d’abord convexe puis concave. Le point de coordonnées (2 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.



Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_XlgCeLcN1k**](https://youtu.be/_XlgCeLcN1k)

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de milliers de clés produites s'exprime par :

, définie sur l’intervalle [0 ; 10].

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction .

En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

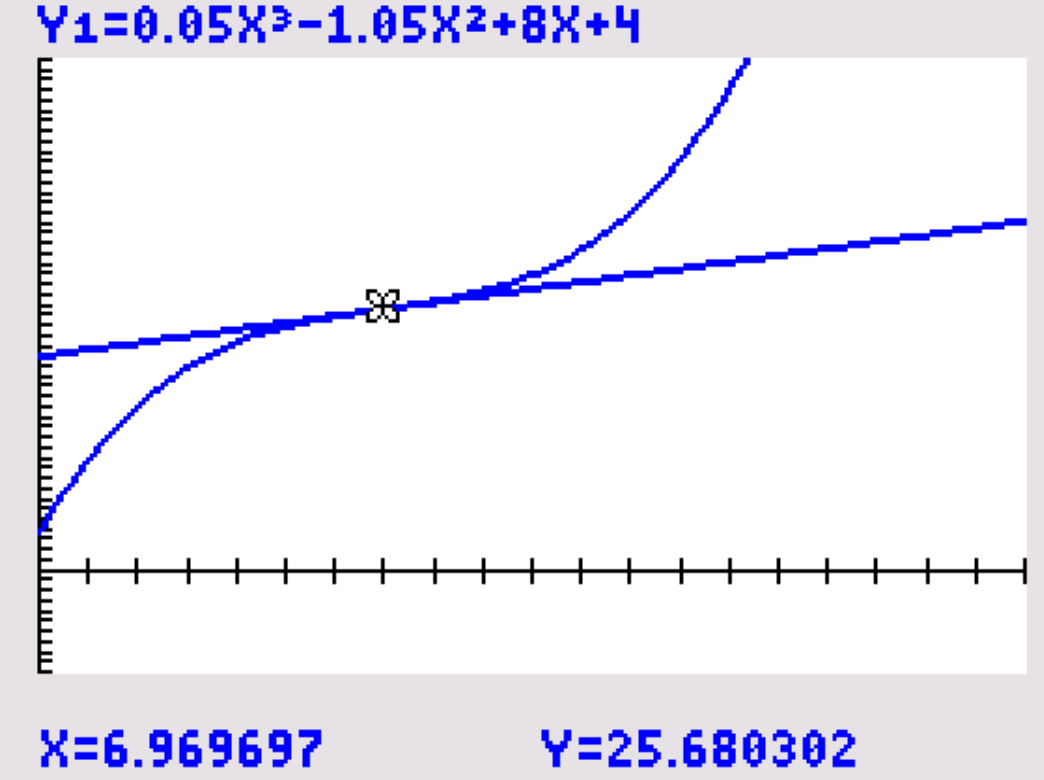
2) Démontrer ces résultats.

3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l’exercice.

**Correction**

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle

[7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour .



2)

Or, pour .

On peut ainsi résumer les variations de et la convexité de dans le tableau suivant :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 7 10 |
|  | O + |
|  |  |
| Convexité de | concave convexe |

Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Étudier une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo**](https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo)

Soit la fonction définie sur par .

a) Calculer la dérivée de la fonction .

b) Dresser le tableau de variations de la fonction .

c) Tracer la courbe représentative de la fonction en s'aidant de la calculatrice.

d) Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.

e) Démontrer que .

f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

**Correction**

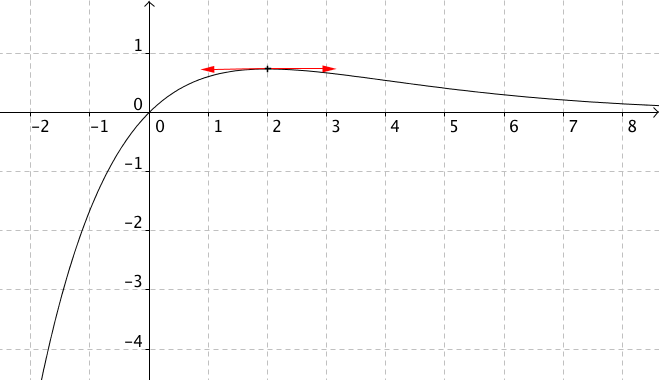
a) .

b) Comme , est du signe de .

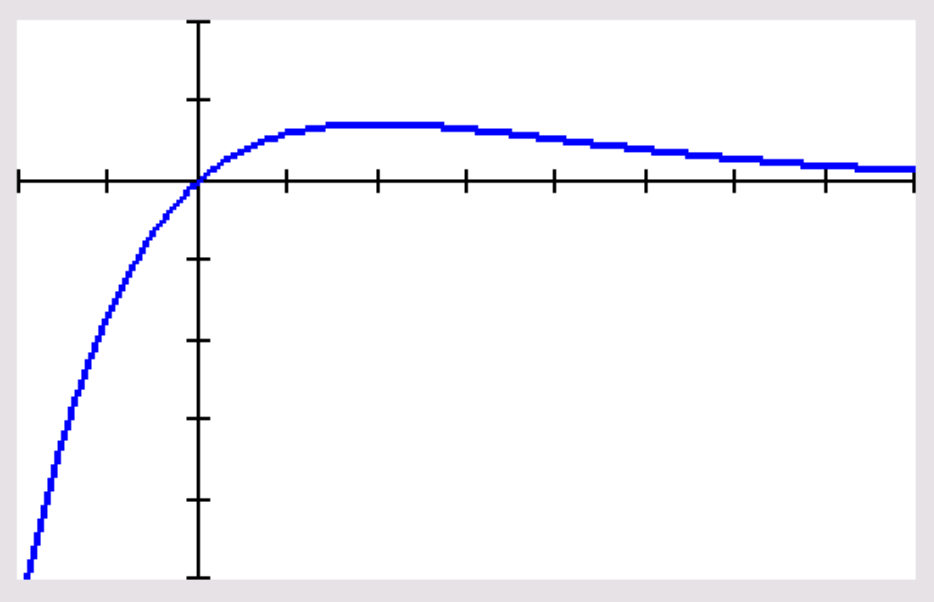
est donc croissante sur l'intervalle et décroissante sur l'intervalle .

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 2 + |
|  | + O – |
|  |  |



c)



d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

e)

.

f) Comme , est du signe de .

Donc pour soit .

pour soit .

Ainsi est croissante sur et donc *f* est convexe sur cet intervalle.

est décroissante sur et donc *f* est concave sur cet intervalle.

On en déduit que la courbe représentative de *f* possède un point d'inflexion d'abscisse 4.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)