

# CONVEXITÉ

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/gge4xdn6cFA>

## Partie 1 : Dérivée seconde

**Définition :** Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$  dont la dérivée  $f'$  est dérivable sur  $I$ .

On appelle **fonction dérivée seconde** de  $f$  sur  $I$  la dérivée de  $f'$  et on note :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

**Méthode :** Calculer la dérivée seconde d'une fonction

▶ Vidéo <https://youtu.be/W6rypabq8uA>

Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies par :

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$$

$$g(x) = xe^x$$

$$h(x) = \cos(2x)$$

### Correction

- $f'(x) = 9x^2 - 10x$

$$f''(x) = (f'(x))' = 18x - 10$$

- $g'(x) = 1 \times e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$$g''(x) = e^x(1 + x) + e^x \times 1 = e^x(2 + x)$$

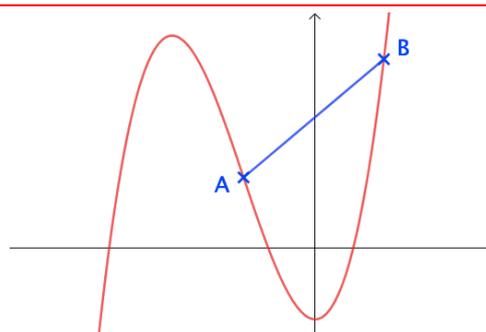
- $h'(x) = -2\sin(2x)$

$$h''(x) = -2 \times 2 \cos(2x) = -4\cos(2x)$$

## Partie 2 : Fonction convexe et fonction concave

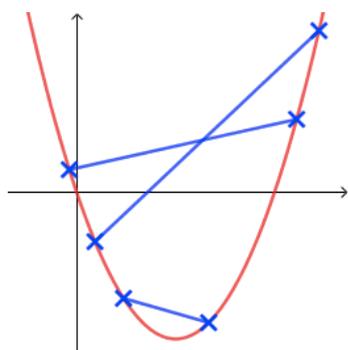
### 1) Définitions avec les cordes

**Définition :** Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

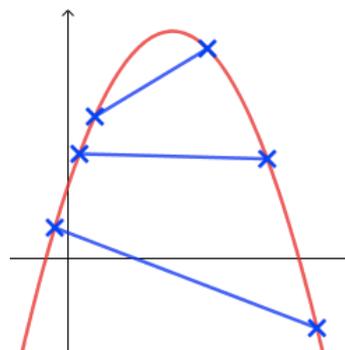


**Définitions :** Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

- La fonction  $f$  est **convexe** sur  $I$ , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
- La fonction  $f$  est **concave** sur  $I$ , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



Fonction convexe

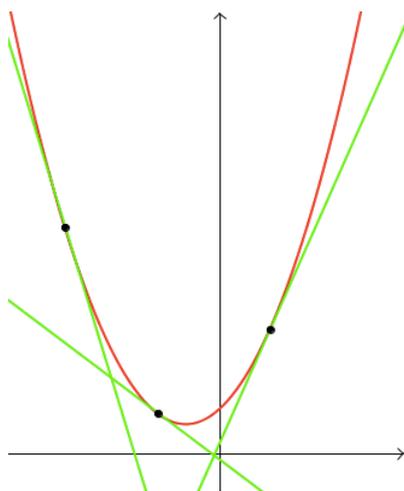


Fonction concave

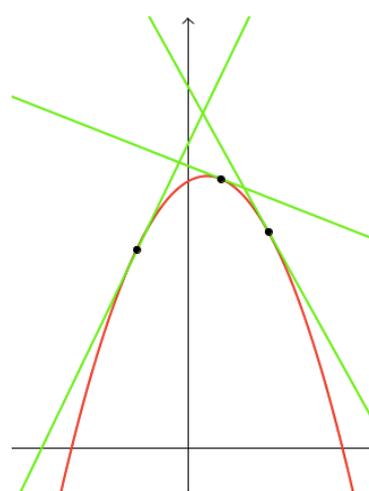
## 2) Définitions avec les tangentes

**Définitions :** Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- La fonction  $f$  est **convexe** sur  $I$ , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction  $f$  est **concave** sur  $I$ , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



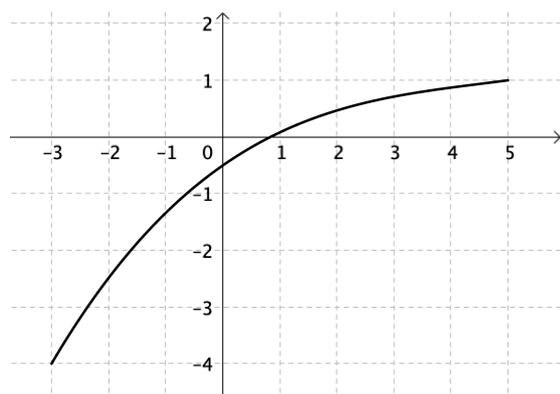
Fonction concave

**Méthode :** Reconnaître graphiquement la convexité

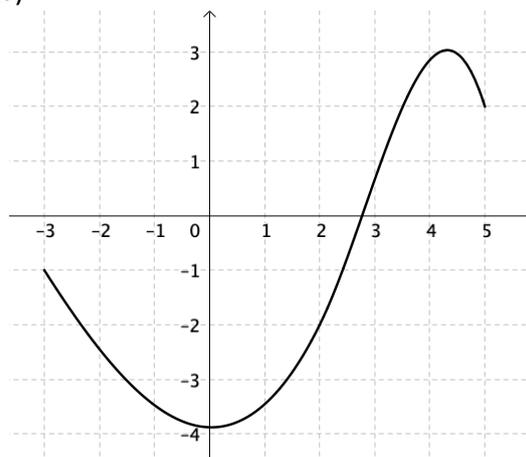
▶ Vidéo [https://youtu.be/ERML85y\\_s6E](https://youtu.be/ERML85y_s6E)

Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l'intervalle  $[-3 ; 5]$ .

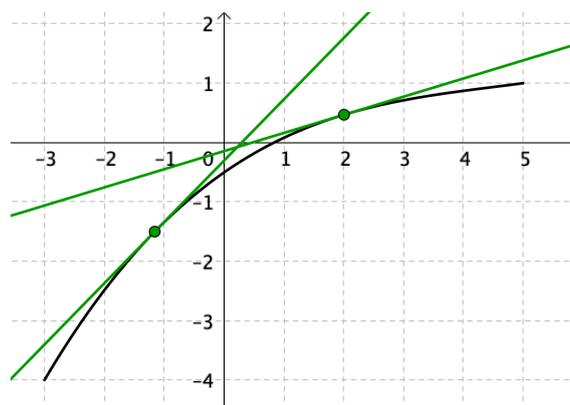
a)



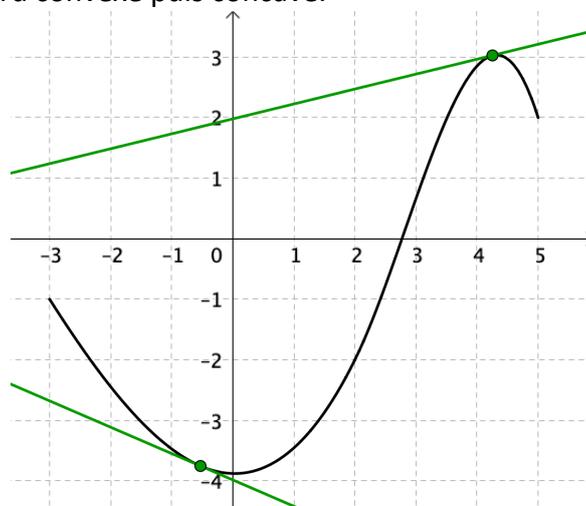
b)

**Correction**

a) La fonction est concave. Sa courbe est en effet entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



b) La fonction est d'abord convexe puis concave.



Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

### 3) Propriétés

#### Propriétés :

- La fonction carré  $x \mapsto x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction cube  $x \mapsto x^3$  est concave sur  $] -\infty ; 0 ]$  et convexe sur  $[ 0 ; +\infty [$ .
- La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est concave sur  $] -\infty ; 0 [$  et convexe sur  $] 0 ; +\infty [$ .
- La fonction racine carrée  $x \mapsto \sqrt{x}$  est concave sur  $[ 0 ; +\infty [$ .

- Admis -

#### Propriété :

Soit une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Dire que la fonction  $f$  est convexe sur  $I$ , revient à dire que sa dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ , soit :  $f''(x) \geq 0$ .
- Dire que la fonction  $f$  est concave sur  $I$ , revient à dire que sa dérivée  $f'$  est décroissante sur  $I$ , soit :  $f''(x) \leq 0$ .

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d'une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

#### Démonstration au programme :

📺 Vidéo <https://youtu.be/-OG8I5Batuo>

- Démontrons que :  $f$  est convexe, si  $f'$  est croissante :

On considère la fonction  $g$  dérivable sur  $I$  et définie par :

$$g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a).$$

Alors :  $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ .

Or  $f'$  est croissante sur  $I$ , donc  $g'$  est également croissante.

De plus,  $g'(a) = 0$ . Donc  $g'$  est négative pour  $x \leq a$  et positive pour  $x \geq a$ .

On peut donc compléter le tableau de variations de  $g$ .

$x$	$a$		
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

En effet :  $g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$

Donc  $g(x) \geq 0$  sur  $I$ .

Soit  $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

On en déduit que la courbe représentative de  $f$  est au-dessus de ses tangentes sur  $I$  et donc que  $f$  est convexe sur  $I$ .

- Démonstration analogue pour prouver que :  $f$  est concave, si  $f'$  est décroissante.

### Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

📺 Vidéo <https://youtu.be/8H2aYKN8NGE>

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$ .  
Étudier la convexité de la fonction  $f$ .

#### Correction

$$f'(x) = x^2 - 18x.$$

$$f''(x) = 2x - 18$$

On a :  $f''(x) = 0$  pour  $x = 9$ .

Pour tout  $x \leq 9$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

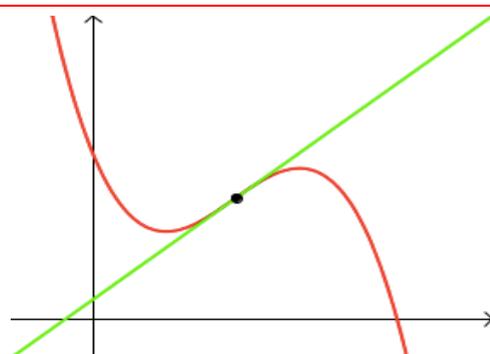
Pour tout  $x \geq 9$ ,  $f''(x) \geq 0$ .

Donc  $f$  est concave sur  $]-\infty ; 9]$  et  $f$  est convexe sur  $[9 ; +\infty[$ .

## Partie 3 : Point d'inflexion

Définition : Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente.



Propriété : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

#### Exemple :

On considère la fonction cube  $x \mapsto x^3$ .

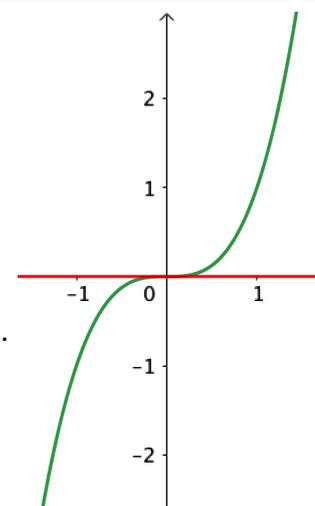
La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour  $x \leq 0$ , la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour  $x \geq 0$ , la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.

L'origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

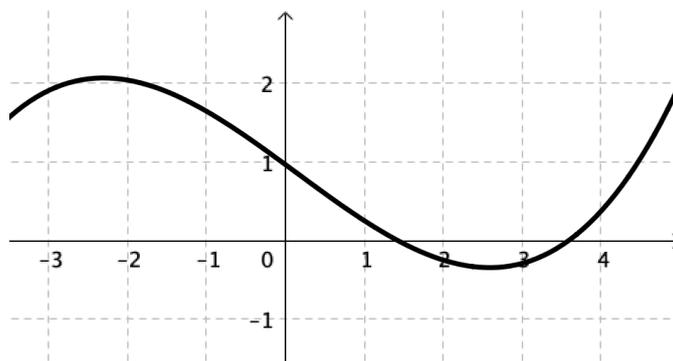


Méthode : Reconnaître graphiquement un point d'inflexion

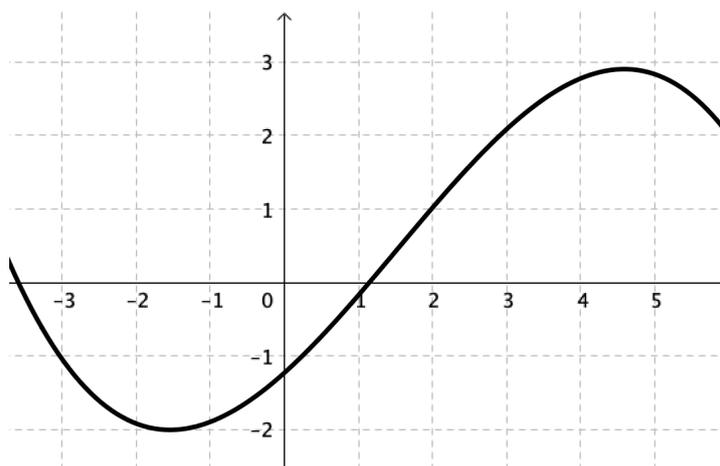
▶ Vidéo <https://youtu.be/r8sYr6ToeLo>

Déterminer graphiquement le point d'inflexion des fonctions représentées ci-dessous.

a)

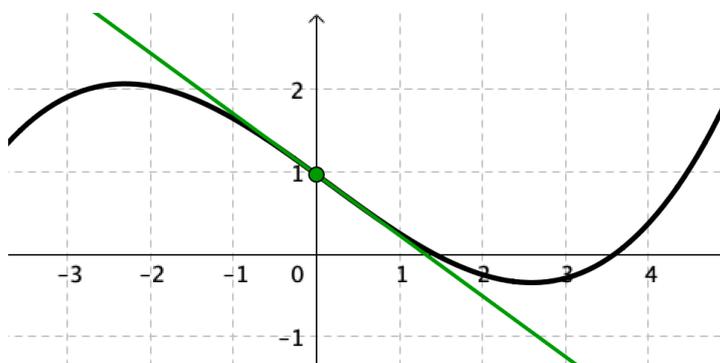


b)

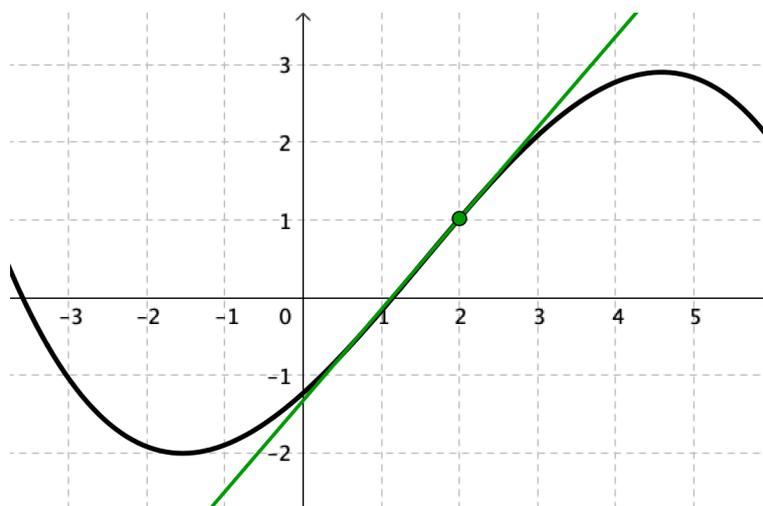


**Correction**

a) La fonction est d'abord concave puis convexe. Le point de coordonnées  $(0 ; 1)$  semble être un point d'inflexion de la courbe.



b) La fonction est d'abord convexe puis concave. Le point de coordonnées  $(2 ; 1)$  semble être un point d'inflexion de la courbe.



### Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

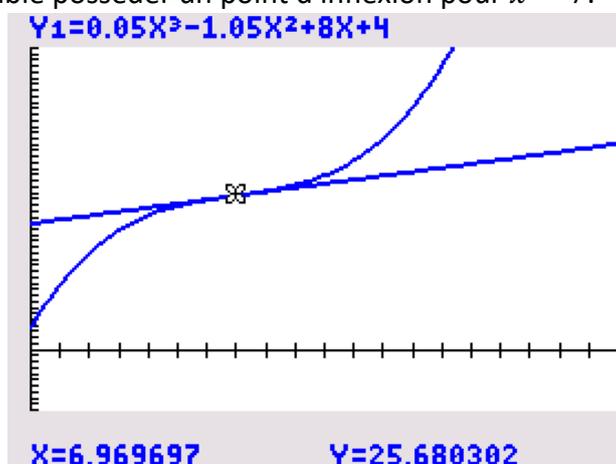
📺 Vidéo [https://youtu.be/\\_XlgCeLcN1k](https://youtu.be/_XlgCeLcN1k)

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois. Le coût de fabrication  $C$  (en milliers d'euros) de  $x$  milliers de clés produites s'exprime par :  $C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$ , définie sur l'intervalle  $[0 ; 10]$ .

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction  $C$ . En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
- 2) Démontrer ces résultats.
- 3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

### Correction

1) La fonction semble concave sur l'intervalle  $[0 ; 7]$  et convexe sur l'intervalle  $[7 ; 10]$ . La courbe semble posséder un point d'inflexion pour  $x = 7$ .



$$\begin{aligned}
 2) \quad C(x) &= 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4 \\
 C'(x) &= 0,15x^2 - 2,1x + 8 \\
 C''(x) &= 0,3x - 2,1
 \end{aligned}$$

Or,  $0,3x - 2,1 = 0$  pour  $x = 7$ .

On peut ainsi résumer les variations de  $C'$  et la convexité de  $C$  dans le tableau suivant :

$x$	0	7	10	
$C''(x)$		-	0	+
$C'(x)$				
Convexité de $C$		concave	convexe	

$$C(7) = 25,7$$

Ainsi, le point de coordonnées  $(7 ; 25,7)$  est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication  $C$  ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

### Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction

Vidéo <https://youtu.be/AaxQHlsxZkg>

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 2x^2$ .

a) Étudier la convexité de la fonction  $f$ .

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction  $f$  en  $-1$ .

c) En déduire que pour tout réel  $x$  négatif, on a :  $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$ .

### Correction

a)  $f'(x) = 3x^2 - 4x$ .

$$f''(x) = 6x - 4 \text{ qui s'annule pour } x = \frac{2}{3}.$$

Pour tout  $x \leq \frac{2}{3}$  :  $f''(x) \leq 0$ .

Pour tout  $x \geq \frac{2}{3}$  :  $f''(x) \geq 0$ .

Donc  $f$  est concave sur  $]-\infty ; \frac{2}{3}]$  et  $f$  est convexe sur  $[\frac{2}{3} ; +\infty[$ .

b) L'équation de la tangente à la courbe de la fonction  $f$  en  $-1$  est de la forme :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

On a :  $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) = 7$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 = -3$$

Donc, l'équation de la tangente en  $-1$  est :  $y = 7(x + 1) - 3$  soit :

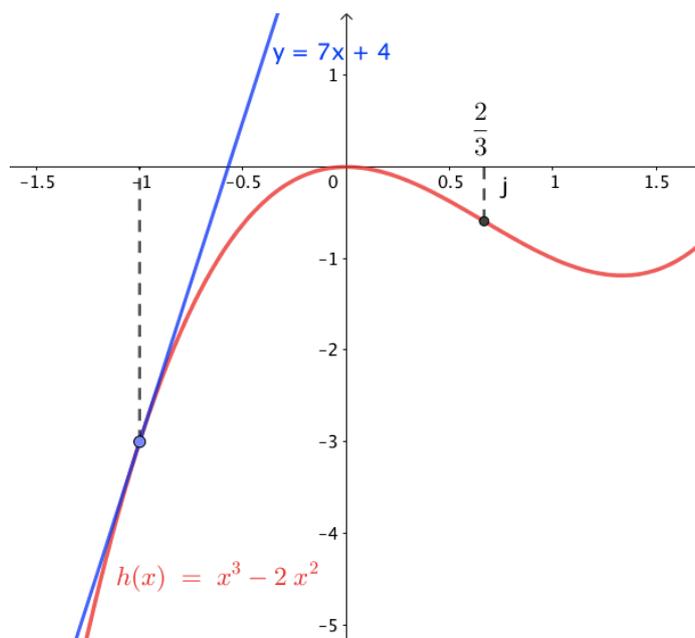
$$y = 7x + 4$$

c)  $f$  est concave sur  $]-\infty ; \frac{2}{3}]$  donc sur cet intervalle, la courbe représentative de  $f$  est située en dessous de ses tangentes.

Soit, en particulier, la courbe de  $f$  est située en dessous de la tangente en  $-1$ .

On a ainsi,  $f(x) \leq 7x + 4$  sur  $]-\infty; \frac{2}{3}]$ .

Soit  $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$  sur  $]-\infty; \frac{2}{3}]$  et donc en particulier pour tout  $x$  négatif.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)