CONVEXITÉ

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/gge4xdn6cFA**](https://youtu.be/gge4xdn6cFA)

**Partie 1 : Dérivée seconde**

Définition : Soit une fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est dérivable sur .

On appelle **fonction dérivée seconde** de sur la dérivée de et on note :

.

Méthode : Calculer la dérivée seconde d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/W6rypabq8uA**](https://youtu.be/W6rypabq8uA)

Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions , et définies par :

**Correction**

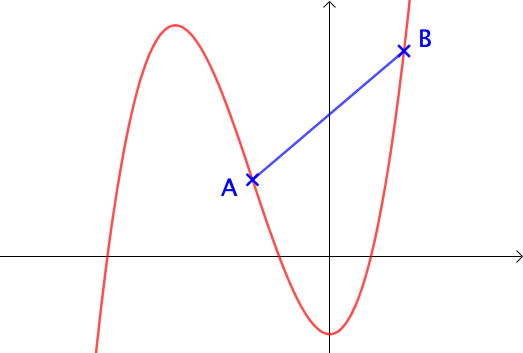
●

●

●

**Partie 2 : Fonction convexe et fonction concave**

1) Définitions avec les cordes

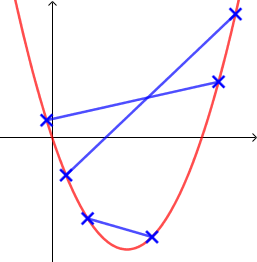
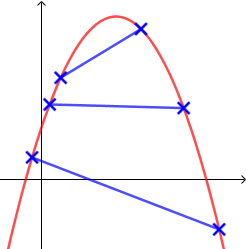
Définition : Une **corde** est un segment reliant deux

points d'une courbe.

Définitions : Soit une fonction définie sur un intervalle .

- La fonction est **convexe** sur , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction est **concave** sur , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



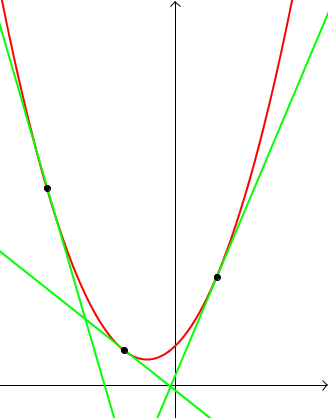
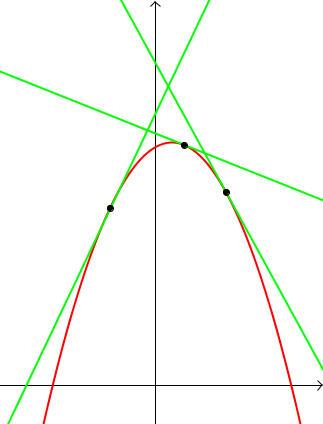
Fonction convexe Fonction concave

2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction dérivable sur un intervalle .

- La fonction est **convexe** sur , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

- La fonction est **concave** sur , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



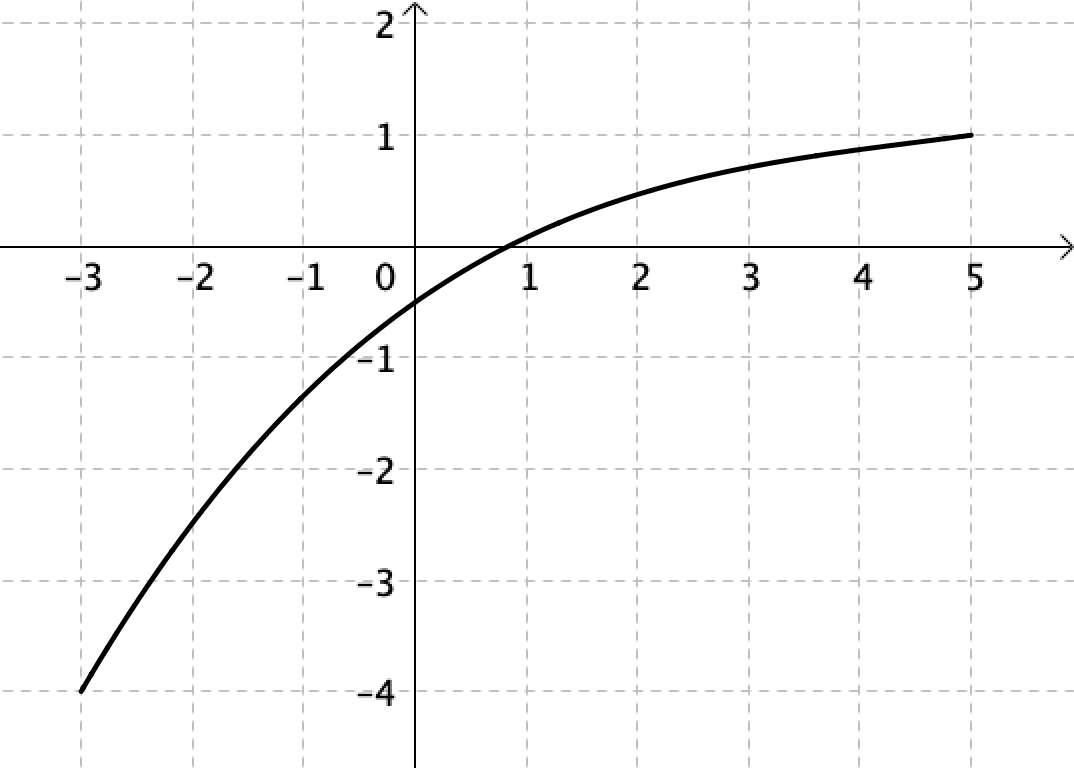
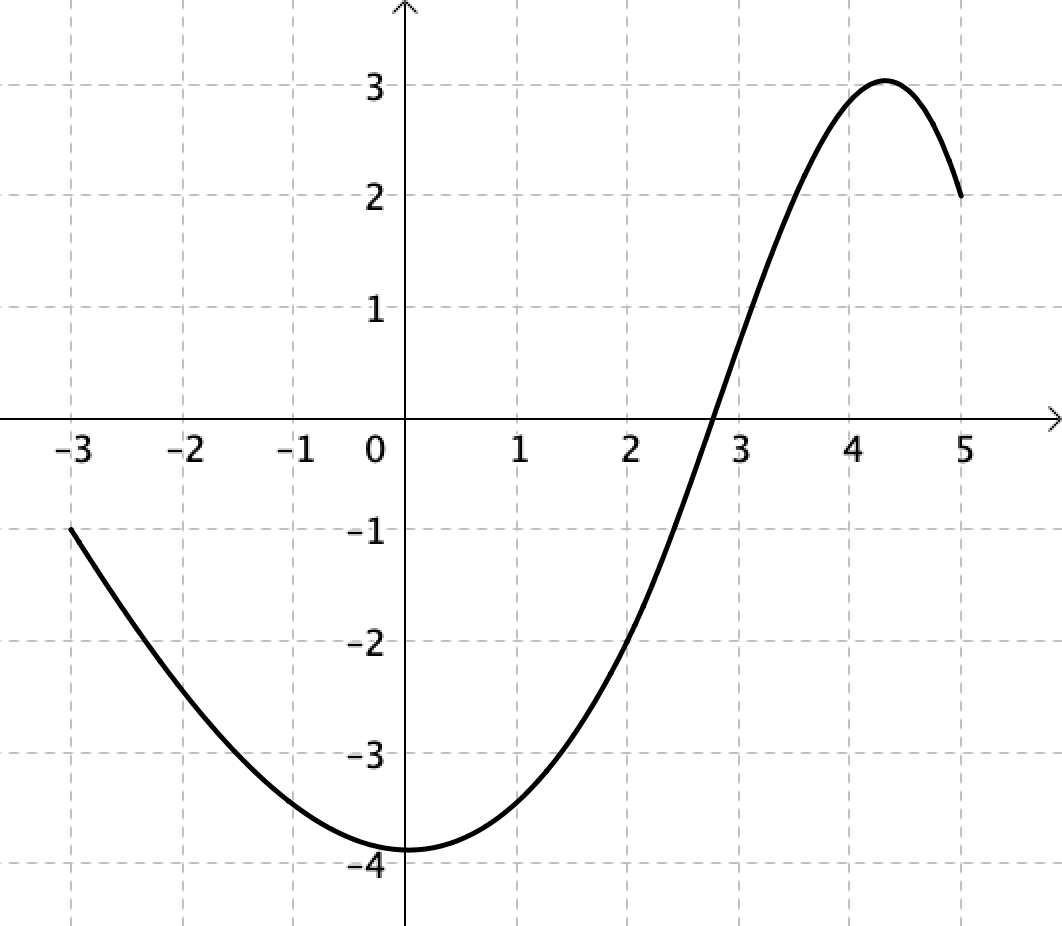
Fonction convexe Fonction concave

Méthode : Reconnaître graphiquement la convexité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ERML85y\_s6E**](https://youtu.be/ERML85y_s6E)

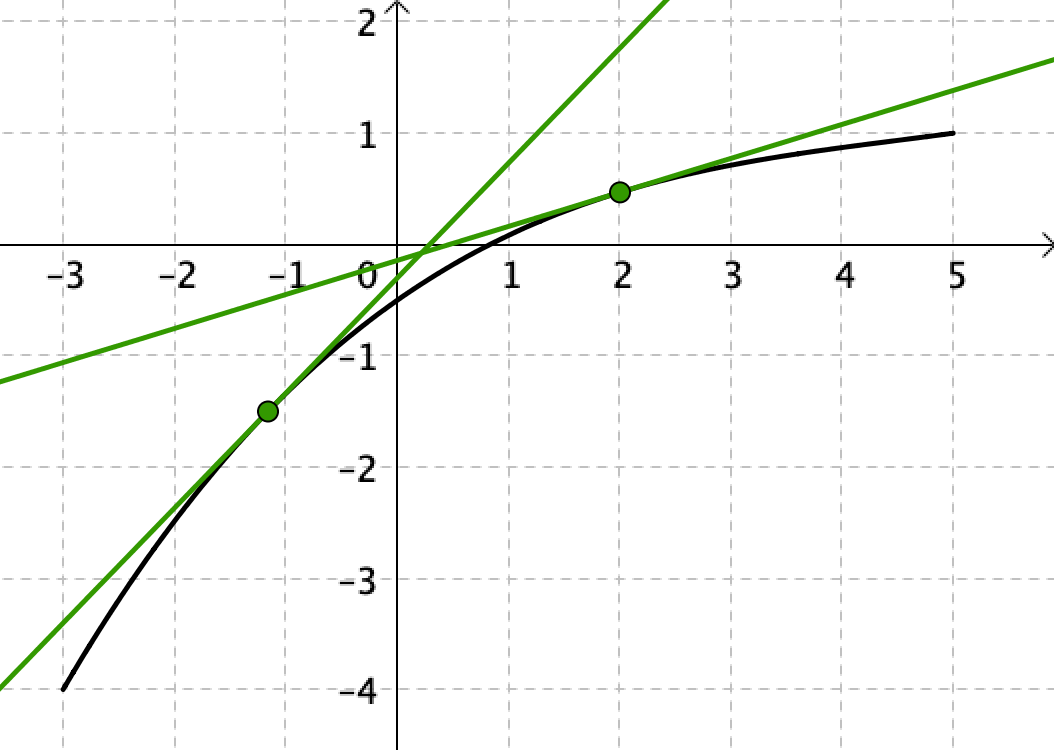
Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l’intervalle .

a) b)

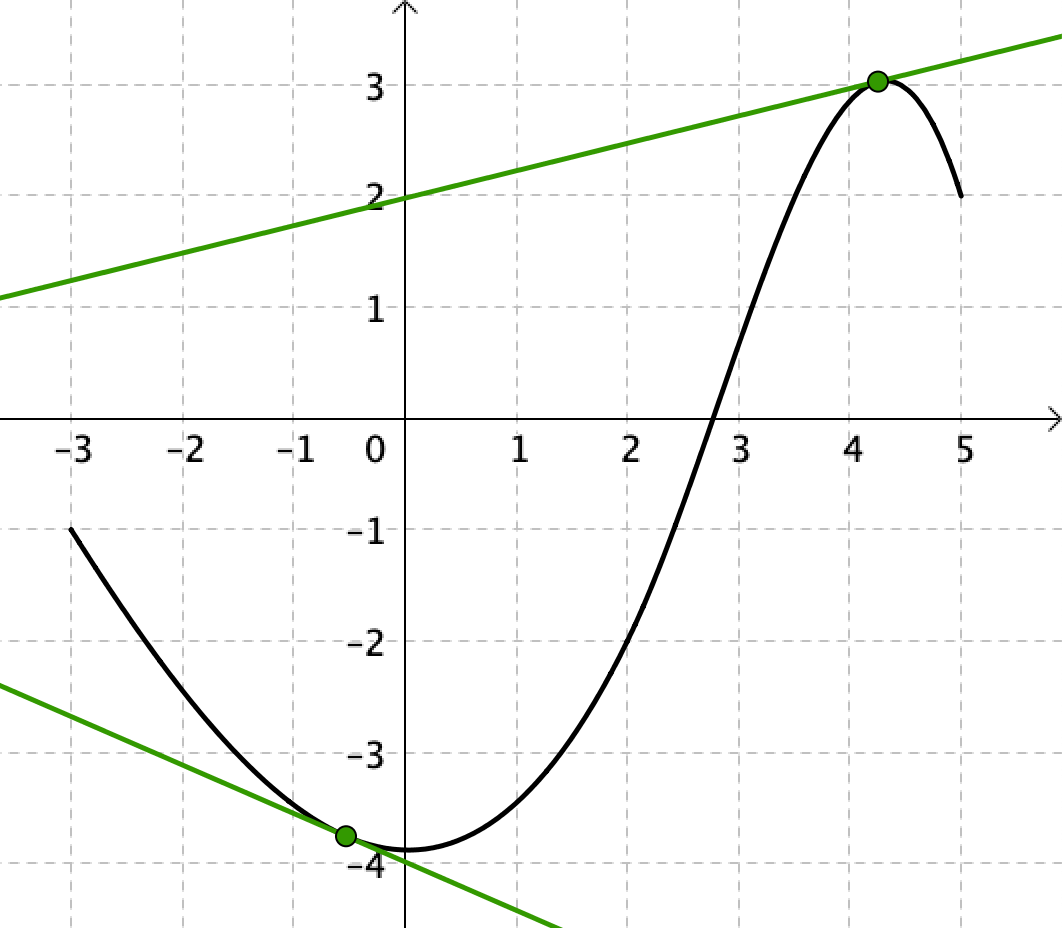
 

**Correction**

a) La fonction est concave. Sa courbe est en effet entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



b) La fonction est d’abord convexe puis concave.



Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

3) Propriétés

Propriétés :

- La fonction carré est convexe sur .

- La fonction cube est concave sur et convexe sur .

- La fonction inverse est concave sur et convexe sur .

- La fonction racine carrée est concave sur .

*- Admis -*

Propriété :

Soit une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle .

- Dire que la fonction est convexe sur , revient à dire que sa dérivée est croissante sur , soit : .

- Dire que la fonction est concave sur , revient à dire que sa dérivée est décroissante sur , soit : .

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d’une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-OG8l5Batuo**](https://youtu.be/-OG8l5Batuo)

- Démontrons que : est convexe, si est croissante :

On considère la fonction dérivable sur I et définie par :

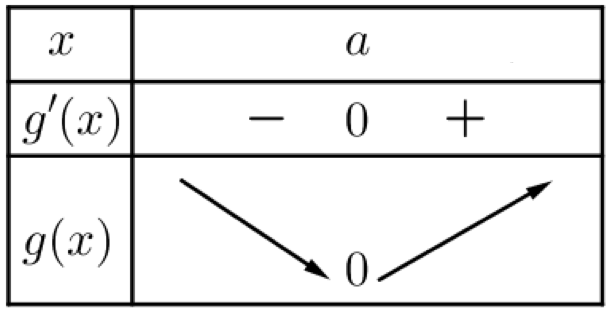
.

Alors : .

Or est croissante sur I, donc est également croissante.

De plus, . Donc est négative pour et positive pour .

On peut donc compléter le tableau de variations de



En effet :

Donc sur I.

Soit

On en déduit que la courbe représentative de est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que : est concave, si est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8H2aYKN8NGE**](https://youtu.be/8H2aYKN8NGE)

Soit la fonction définie sur par .

Étudier la convexité de la fonction .

**Correction**

.

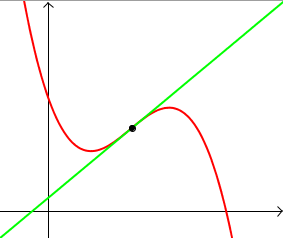
On a : pour

Pour tout , .

Pour tout , .

Donc est concave sur et est convexe sur .

**Partie 3 : Point d'inflexion**

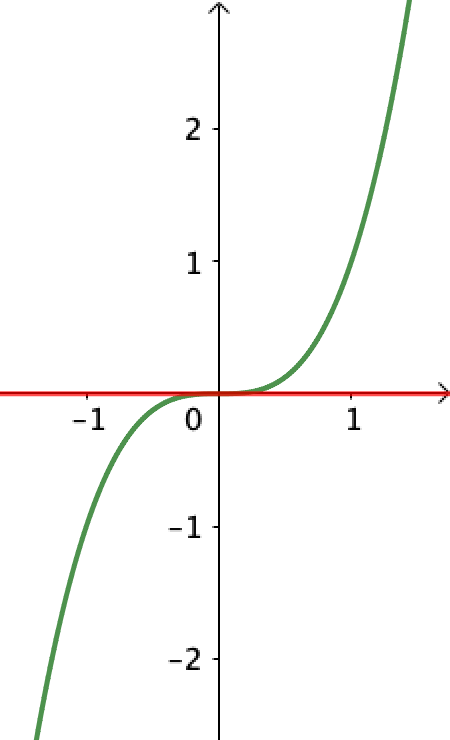
Définition : Soit une fonction dérivable sur

un intervalle .

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe

traverse sa tangente.

Propriété : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.



Exemple :

On considère la fonction cube .

La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour , la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour , la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.

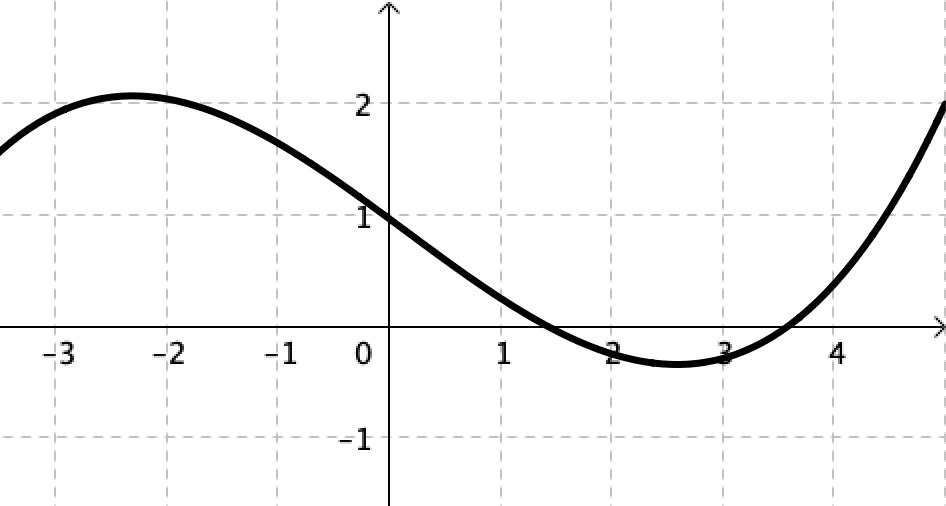
L’origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Méthode : Reconnaître graphiquement un point d’inflexion

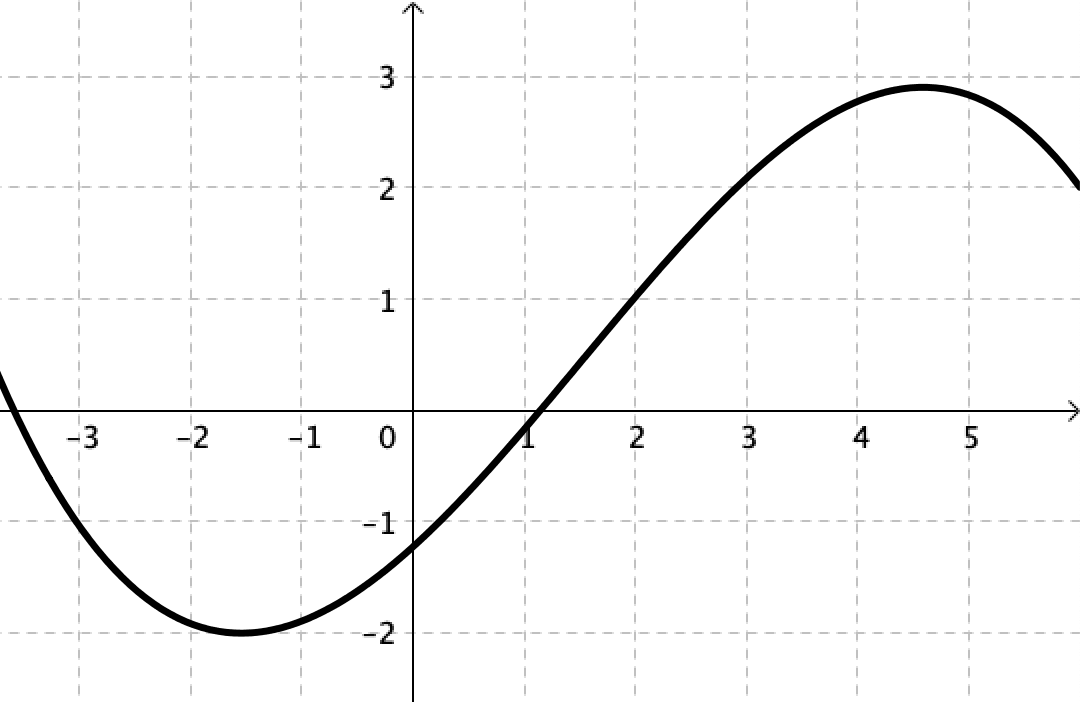
 **Vidéo** [**https://youtu.be/r8sYr6ToeLo**](https://youtu.be/r8sYr6ToeLo)

Déterminer graphiquement le point d’inflexion des fonctions représentées ci-dessous.

a)

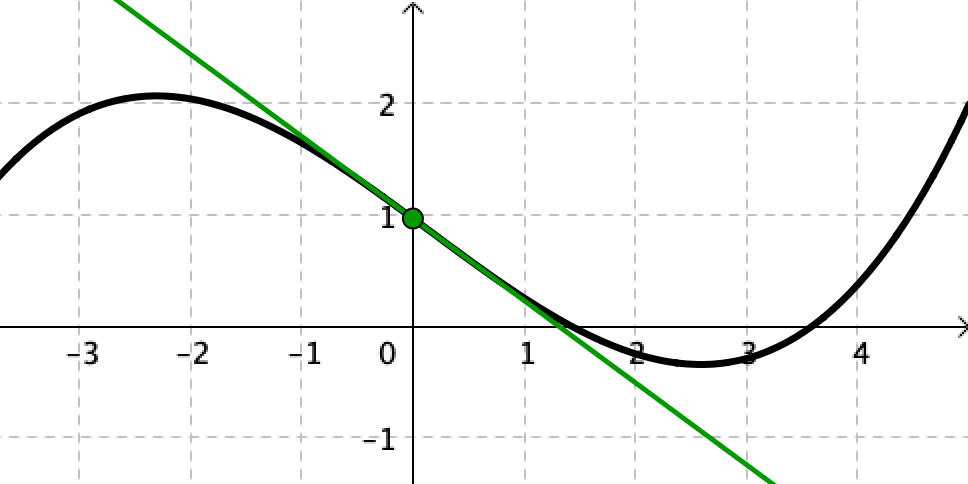


b)

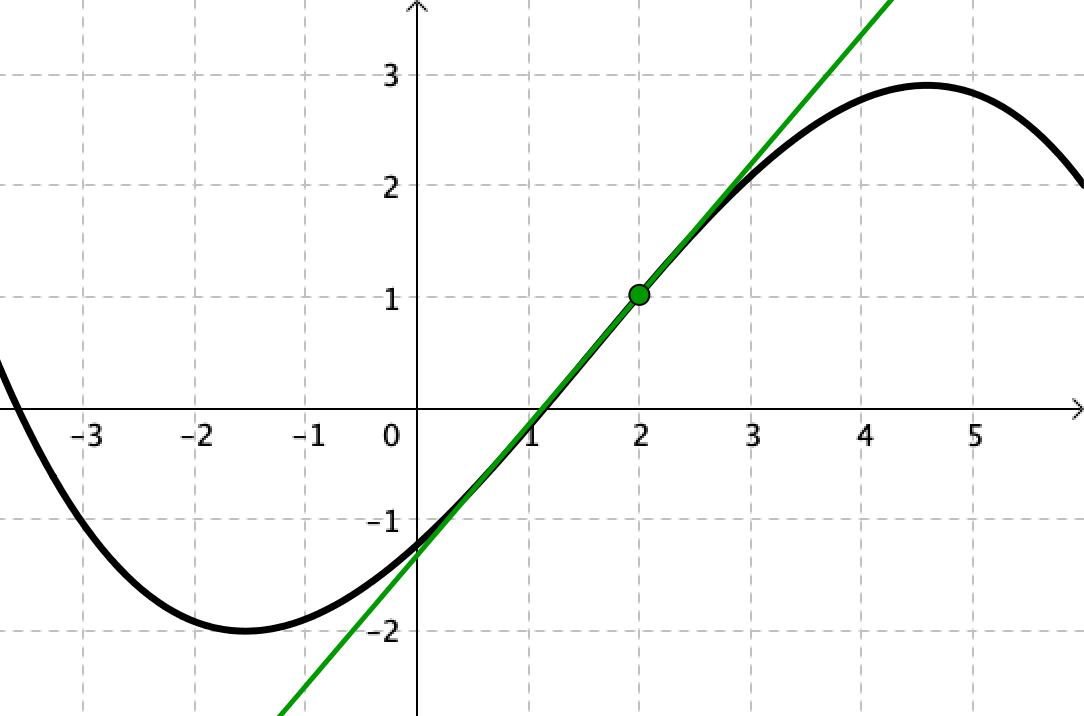


**Correction**

a) La fonction est d’abord concave puis convexe. Le point de coordonnées (0 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.



b) La fonction est d’abord convexe puis concave. Le point de coordonnées (2 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.



Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_XlgCeLcN1k**](https://youtu.be/_XlgCeLcN1k)

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de milliers de clés produites s'exprime par :

, définie sur l’intervalle [0 ; 10].

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction .

En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

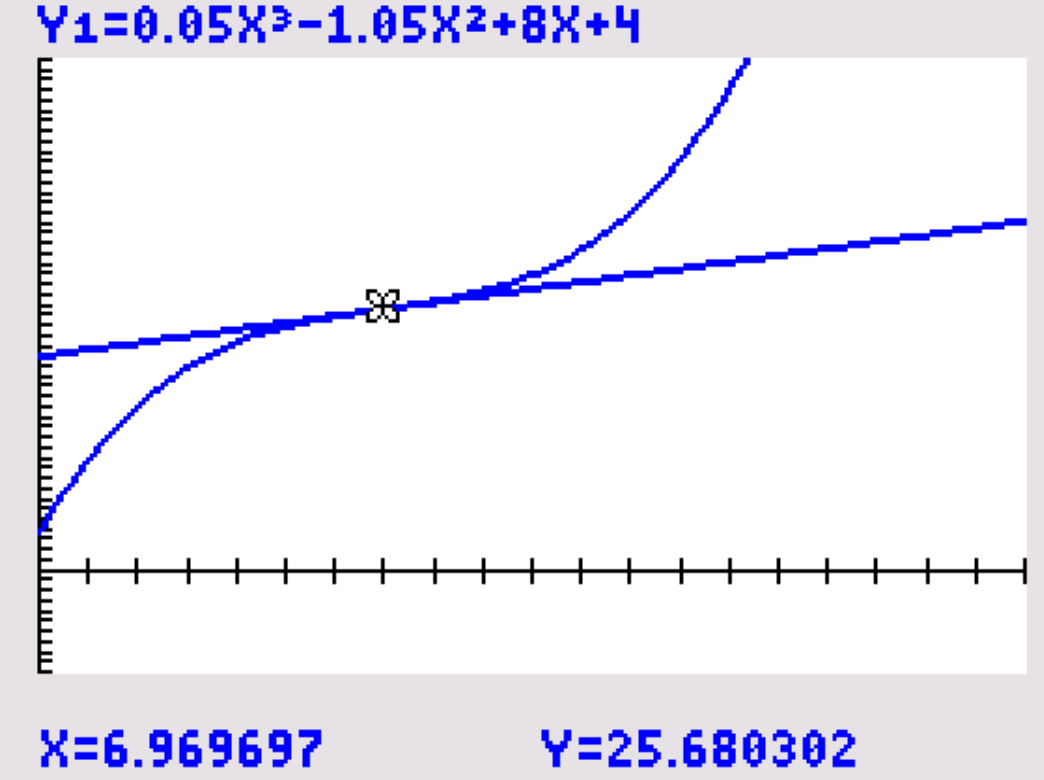
2) Démontrer ces résultats.

3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l’exercice.

**Correction**

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle

[7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour .



2)

Or, pour .

On peut ainsi résumer les variations de et la convexité de dans le tableau suivant :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 7 10 |
|  | O + |
|  |  |
| Convexité de | concave convexe |

Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/AaxQHlsxZkg**](https://youtu.be/AaxQHlsxZkg)

Soit la fonction définie sur par .

a) Étudier la convexité de la fonction .

b) Déterminer l’équation de la tangente à la courbe de la fonction en –1.

c) En déduire que pour tout réel négatif, on a : .

**Correction**

a) .

qui s’annule pour .

Pour tout  : .

Pour tout  : .

Donc est concave sur et est convexe sur .

b) L’équation de la tangente à la courbe de la fonction en –1 est de la forme :

On a :

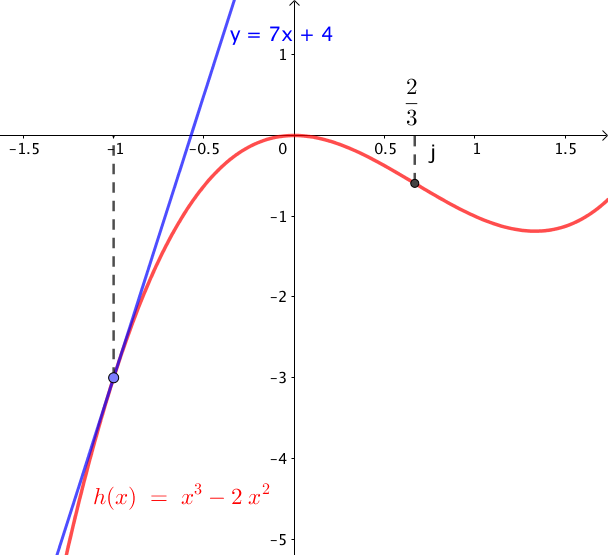
Donc, l’équation de la tangente en –1 est : soit :

c) est concave sur donc sur cet intervalle, la courbe représentative de est située en dessous de ses tangentes.

Soit, en particulier, la courbe de est située en dessous de la tangente en –1.

On a ainsi, sur

Soit sur et donc en particulier pour tout négatif.





Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)