CONVEXITÉ

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/gge4xdn6cFA**](https://youtu.be/gge4xdn6cFA)

**Partie 1 : Dérivée seconde**

Définition : Soit une fonction $f$dérivable sur un intervalle $I$ dont la dérivée $f'$ est dérivable sur $I$.

On appelle **fonction dérivée seconde** de $f$ sur $I$ la dérivée de $f'$et on note :

$f^{''}\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)^{'}$.

Méthode : Calculer la dérivée seconde d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/W6rypabq8uA**](https://youtu.be/W6rypabq8uA)

Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions $f$, $g$ et $h$ définies par :

$f\left(x\right)=3x^{3}-5x^{2}+1$

$$g\left(x\right)=xe^{x}$$

$$h\left(x\right)=cos⁡(2x)$$

**Correction**

● $f'\left(x\right)=9x^{2}-10x$

 $f''\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)'=18x-10$

●$ g^{'}(x)=1×e^{x}+xe^{x}=e^{x}(1+x)$

 $g^{''}\left(x\right)=e^{x}\left(1+x\right)+e^{x}×1=e^{x}(2+x)$

● $h'\left(x\right)=-2sin⁡(2x)$

 $h^{''}\left(x\right)=-2×2\cos(\left(2x\right))=-4cos⁡(2x)$

**Partie 2 : Fonction convexe et fonction concave**

 1) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux

points d'une courbe.

Définitions : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$.

- La fonction $f$ est **convexe** sur $I$, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction $f$ est **concave** sur $I$, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



Fonction convexe Fonction concave

 2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle $I$.

- La fonction $f$ est **convexe** sur $I$, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

- La fonction $f$ est **concave** sur $I$, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



 Fonction convexe Fonction concave

Méthode : Reconnaître graphiquement la convexité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ERML85y\_s6E**](https://youtu.be/ERML85y_s6E)

Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l’intervalle $[-3 ; 5]$.

a) b)

 

**Correction**

a) La fonction est concave. Sa courbe est en effet entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



b) La fonction est d’abord convexe puis concave.



Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

3) Propriétés

Propriétés :

- La fonction carré $x⟼x^{2}$ est convexe sur $R$.

- La fonction cube $x⟼x^{3}$ est concave sur $\left]-\infty ;0\right]$ et convexe sur $\left[0 ; +\infty \right[$.

- La fonction inverse $x⟼$ $\frac{1}{x}$ est concave sur $\left]-\infty ;0\right[$ et convexe sur $\left]0 ; +\infty \right[$.

- La fonction racine carrée $x⟼\sqrt{x}$ est concave sur $\left[0 ; +\infty \right[$.

*- Admis -*

Propriété :

Soit une fonction $f$ définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$.

- Dire que la fonction $f$ est convexe sur $I$, revient à dire que sa dérivée $f'$ est croissante sur $I$, soit : $f''(x)\geq 0$.

- Dire que la fonction $f$ est concave sur $I$, revient à dire que sa dérivée $f'$ est décroissante sur $I$, soit : $f''(x)\leq 0$.

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d’une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-OG8l5Batuo**](https://youtu.be/-OG8l5Batuo)

- Démontrons que : $f$ est convexe, si $f'$ est croissante :

On considère la fonction $g$ dérivable sur I et définie par :

$g\left(x\right)=f\left(x\right)-f^{'}\left(a\right)\left(x-a\right)-f(a)$.

Alors : $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-f^{'}\left(a\right)$.

Or $f'$ est croissante sur I, donc $g'$ est également croissante.

De plus, $g'\left(a\right)=0$. Donc $g'$ est négative pour $x\leq a$ et positive pour $x\geq a$.

On peut donc compléter le tableau de variations de $g.$



En effet : $g\left(a\right)=f\left(a\right)-f^{'}\left(a\right)\left(a-a\right)-f\left(a\right)=0$

Donc $g\left(x\right)\geq 0$ sur I.

Soit $f\left(x\right)\geq f^{'}\left(a\right)\left(x-a\right)+f(a)$

On en déduit que la courbe représentative de $f$ est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que $f$ est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que : $f$ est concave, si $f'$ est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8H2aYKN8NGE**](https://youtu.be/8H2aYKN8NGE)

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-9x^{2}+4$.

Étudier la convexité de la fonction $f$.

**Correction**

$f'\left(x\right)=x^{2}-18x$.

$f''\left(x\right)=2x-18$

On a : $f^{''}\left(x\right)=0 $pour $x=9.$

Pour tout $x\leq 9$, $f''\left(x\right)\leq 0$.

Pour tout $x\geq 9$, $f''\left(x\right)\geq 0$.

Donc $f$ est concave sur $\left]-\infty ;9\right]$ et $f$ est convexe sur $\left[9 ; +\infty \right[$.

**Partie 3 : Point d'inflexion**

Définition : Soit une fonction $f$ dérivable sur

un intervalle $I$.

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe

traverse sa tangente.

Propriété : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.



Exemple :

On considère la fonction cube $x⟼x^{3}$.

La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour $x\leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour $x\geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.

L’origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Méthode : Reconnaître graphiquement un point d’inflexion

 **Vidéo** [**https://youtu.be/r8sYr6ToeLo**](https://youtu.be/r8sYr6ToeLo)

Déterminer graphiquement le point d’inflexion des fonctions représentées ci-dessous.

a)



b)



**Correction**

a) La fonction est d’abord concave puis convexe. Le point de coordonnées (0 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.



b) La fonction est d’abord convexe puis concave. Le point de coordonnées (2 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.



Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_XlgCeLcN1k**](https://youtu.be/_XlgCeLcN1k)

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication $C$ (en milliers d'euros) de $x$ milliers de clés produites s'exprime par :

$C\left(x\right)=0,05x^{3}-1,05x^{2}+8x+4$, définie sur l’intervalle [0 ; 10].

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction $C$.

En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

2) Démontrer ces résultats.

3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l’exercice.

**Correction**

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle

[7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x=7$.



2) $C\left(x\right)=0,05x^{3}-1,05x^{2}+8x+4$

 $C'\left(x\right)=0,15x^{2}-2,1x+8$

 $C''\left(x\right)=0,3x-2,1$

Or, $0,3x-2,1=0$ pour $x=7$.

On peut ainsi résumer les variations de $C'$ et la convexité de $C$dans le tableau suivant :

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | 0 7 10 |
| $$C''\left(x\right)$$ |  $-$ O + |
| $$C'\left(x\right)$$ |  |
| Convexité de $C$ |  concave convexe |

$$C\left(7\right)=25,7$$

Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication $C$ ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/AaxQHlsxZkg**](https://youtu.be/AaxQHlsxZkg)

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par $f\left(x\right)=x^{3}-2x^{2}$.

a) Étudier la convexité de la fonction $f$.

b) Déterminer l’équation de la tangente à la courbe de la fonction $f$ en –1.

c) En déduire que pour tout réel $x$ négatif, on a : $x^{3}-2x^{2}\leq 7x+4$.

**Correction**

a) $f'\left(x\right)=3x^{2}-4x$.

 $f''\left(x\right)=6x-4$ qui s’annule pour $x=$ $\frac{2}{3}$.

Pour tout $x\leq \frac{2}{3}$ : $f''\left(x\right)\leq 0$.

Pour tout $x\geq \frac{2}{3}$ : $f''\left(x\right)\geq 0$.

Donc $f$ est concave sur $\left]-\infty ;\frac{2}{3}\right]$ et $f$ est convexe sur $\left[\frac{2}{3} ; +\infty \right[$.

b) L’équation de la tangente à la courbe de la fonction $f$ en –1 est de la forme :

$$y=f^{'}\left(-1\right)\left(x-\left(-1\right)\right)+f\left(-1\right)$$

On a : $f^{'}\left(-1\right)=3×\left(-1\right)^{2}-4×\left(-1\right)=7$

 $f\left(-1\right)=\left(-1\right)^{3}-2×\left(-1\right)^{2}=-3$

Donc, l’équation de la tangente en –1 est : $y=7\left(x+1\right)-3$ soit :

$$y=7x+4$$

c) $f$ est concave sur $\left]-\infty ;\frac{2}{3}\right]$ donc sur cet intervalle, la courbe représentative de $f$ est située en dessous de ses tangentes.

Soit, en particulier, la courbe de $f$ est située en dessous de la tangente en –1.

On a ainsi, $f\left(x\right)\leq 7x+4$ sur $\left]-\infty  ;\frac{2}{3}\right].$

Soit $x^{3}-2x^{2}\leq 7x+4$ sur $\left]-\infty  ;\frac{2}{3}\right]$ et donc en particulier pour tout $x$ négatif.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)