CONTINUITÉ DES FONCTIONS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/9SSEUoyHh2s

Partie 1 : Notion de continuité

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

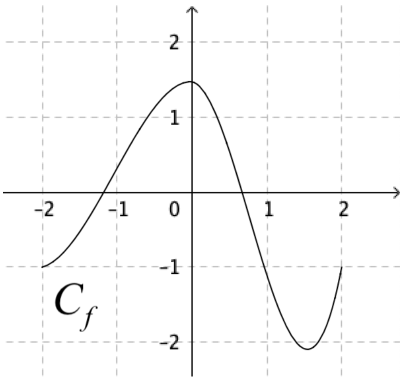
1) Définition

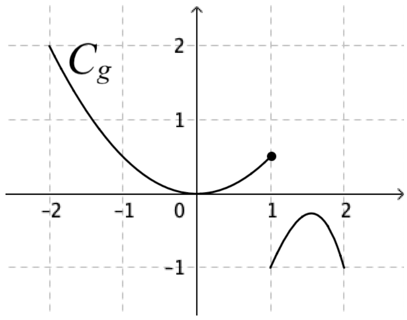
Définition intuitive :
Une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Méthode : Reconnaître graphiquement une fonction continue

Vidéo https://youtu.be/XpjKserte6o

Étudier graphiquement la continuité des fonctions f et g définies et représentées ci-dessous sur l'intervalle $[-2\,;2]$.





Correction

● La courbe de la fonction f peut se tracer sans lever le crayon, elle semble donc continue sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

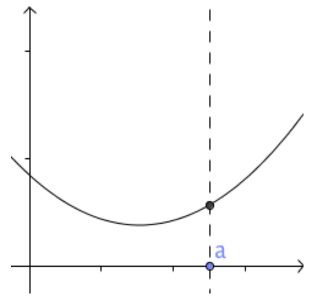
● La courbe de la fonction g ne peut pas se tracer sans lever le crayon, elle n'est donc pas continue sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
Cependant, elle semble continue sur $[-2\,;1]$ et sur $]1\,;2]$.

Propriétés : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
- f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

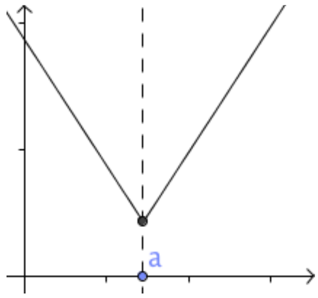
Théorème : Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

- Admis -

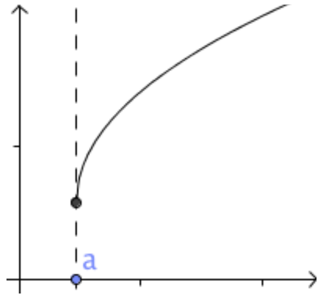
Exemples et contre-exemples :



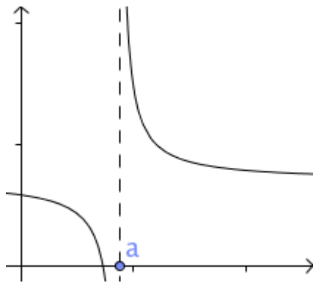
f est continue en a



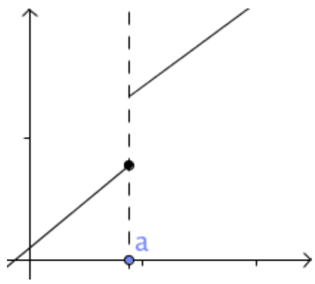
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

2) Cas des fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle donné.

Fonction	Intervalle
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$
Polynôme	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$
$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$

3) Opérations sur les fonctions continues :

Propriétés :
f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.
- $f+g$, $f\times g$, f^n $(n \in \mathbb{N})$ et e^f sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Remarque : Dans la pratique, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Méthode : Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

Vidéo https://youtu.be/03WMLyc7rLE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2, \ pour\ x < 3. \\ x-4, \ pour\ 3 \leq x < 5 \\ -2x+13, \ pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Correction
Les fonctions $x \longmapsto -x+2$, $x \longmapsto x-4$ et $x \longmapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty\,; 3[$, sur $[3\,;\ 5[$ et sur $[5\,;\ +\infty[$.

Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} -x+2 = -3+2 = -1$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x-4 = 3-4 = -1$

Donc : $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$

Et donc la fonction f est continue en 3.

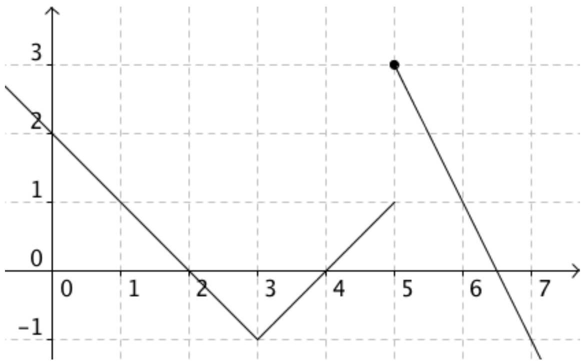
- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} x-4 = 5-4 = 1$

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} -2x+13 = -2 \times 5 + 13 = 3$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.
La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $]-\infty\,; 5[$ et sur $[5\,;\ +\infty[$.

En représentant la fonction f, on peut observer graphiquement le résultat précédent.



Partie 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Exemple :
On donne le tableau de variations de la fonction f.

x	-4		-3		-1		1
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	19

Il est possible de lire dans le tableau, le nombre de solutions éventuelles pour des équations du type $f(x) = k$.

● L'équation $f(x) = 18$ possède 1 solution comprise dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

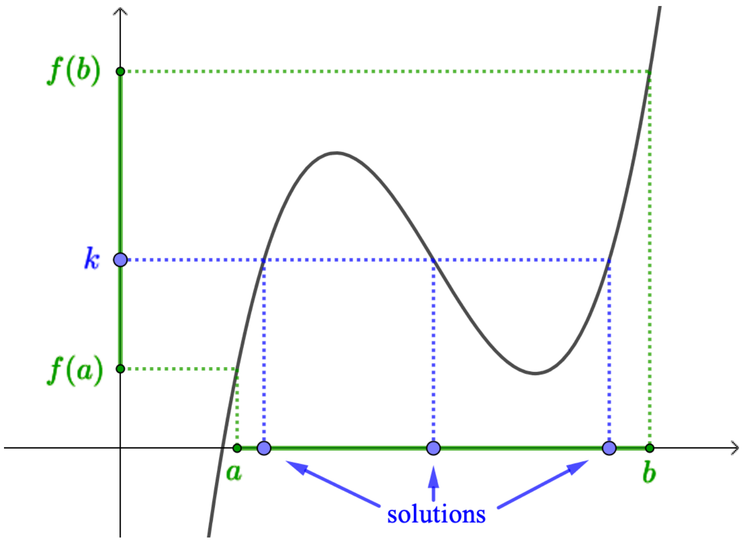
● L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $]-4\,;-3[$, $]-3\,;-1[$ et $]-1\,;1[$.

● L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.

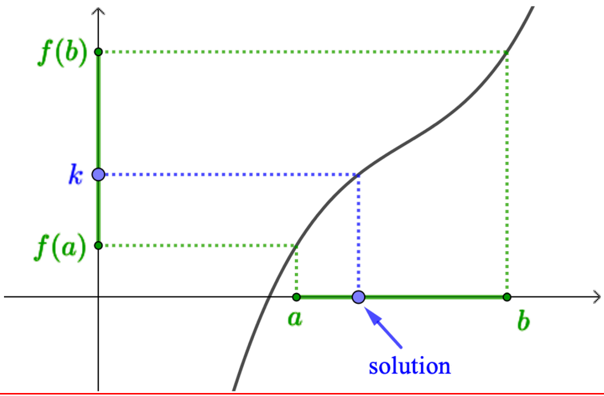
● L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3, l'autre comprise dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

Théorème des valeurs intermédiaires :

● On considère la fonction f **continue** sur l'intervalle $[a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.



● Dans le cas où la fonction f est **strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,;b]$, alors la solution est unique.



- Admis -

Dans la pratique :
Pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a\,;b]$, on démontre que :

1. f est **continue** sur $[a\,;b]$,
2. f **change de signe** sur $[a\,;b]$,
3. f est **strictement monotone** sur $[a\,;b]$,

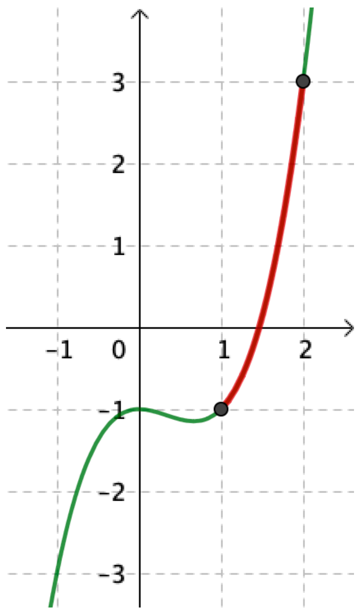
Les conditions 1 et 2 nous assurent que des solutions existent.
Avec la condition 3 en plus, nous savons que la solution est unique.

Méthode : Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (1)

Vidéo https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;2]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

Correction



1) • La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[1\,;2]$, car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

• $f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 = -1 < 0$
$f(2) = 2^3 - 2^2 - 1 = 3 > 0$
Donc la fonction f **change de signe** sur l'intervalle $[1\,;2]$.

• $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$
Donc, pour tout x de $[1\,;2]$, $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc **strictement croissante** sur l'intervalle $[1\,;2]$.

➡ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet alors une unique solution sur l'intervalle $[1\,;2]$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages » successifs en augmentant la précision.

Vidéo TI https://youtu.be/MEkh0fxPakk
Vidéo Casio https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ
Vidéo HP https://youtu.be/93mBoNOpEWg

● La solution est comprise entre 1,4 et 1,5.
En effet : $f(1{,}4) \approx -0{,}216 < 0$
$f(1{,}5) \approx 0{,}125 > 0$

X	Y1
1	-1
1.1	-0.879
1.2	-0.712
1.3	-0.493
1.4	-0.216
1.5	0.125
1.6	0.536
1.7	1.023

X	Y1
1.39	-0.246
1.4	-0.216
1.41	-0.185
1.42	-0.153
1.43	-0.121
1.44	-0.088
1.45	-0.054
1.46	-0.019
1.47	0.0156
1.48	0.0514
1.49	0.0878

● La solution est comprise entre 1,46 et 1,47.
En effet : $f(1{,}46) \approx -0{,}019 < 0$
$f(1{,}47) \approx 0{,}0156 > 0$

On en déduit que : $1{,}46 < \alpha < 1{,}47$.

Remarque :
Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_SolEqua.pdf

Méthode : Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (2)

Vidéo **https://youtu.be/UmGQf7gkvLg**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

Correction
● f est **continue** sur [–1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

● $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 6 = 1$
$f(4) = 4^3 - 4 \times 4^2 + 6 = 6$
Donc **2 est compris entre $\boldsymbol{f(-1)}$ et $\boldsymbol{f(4)}$.**

➡ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle [–1 ; 4].

Remarque : Ici, on n'a pas la stricte monotonie de f, donc on n'a pas l'unicité de la solution.

Partie 3 : Application à l'étude de suites

Théorème :
Soit une fonction f continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L alors $f(L) = L$.

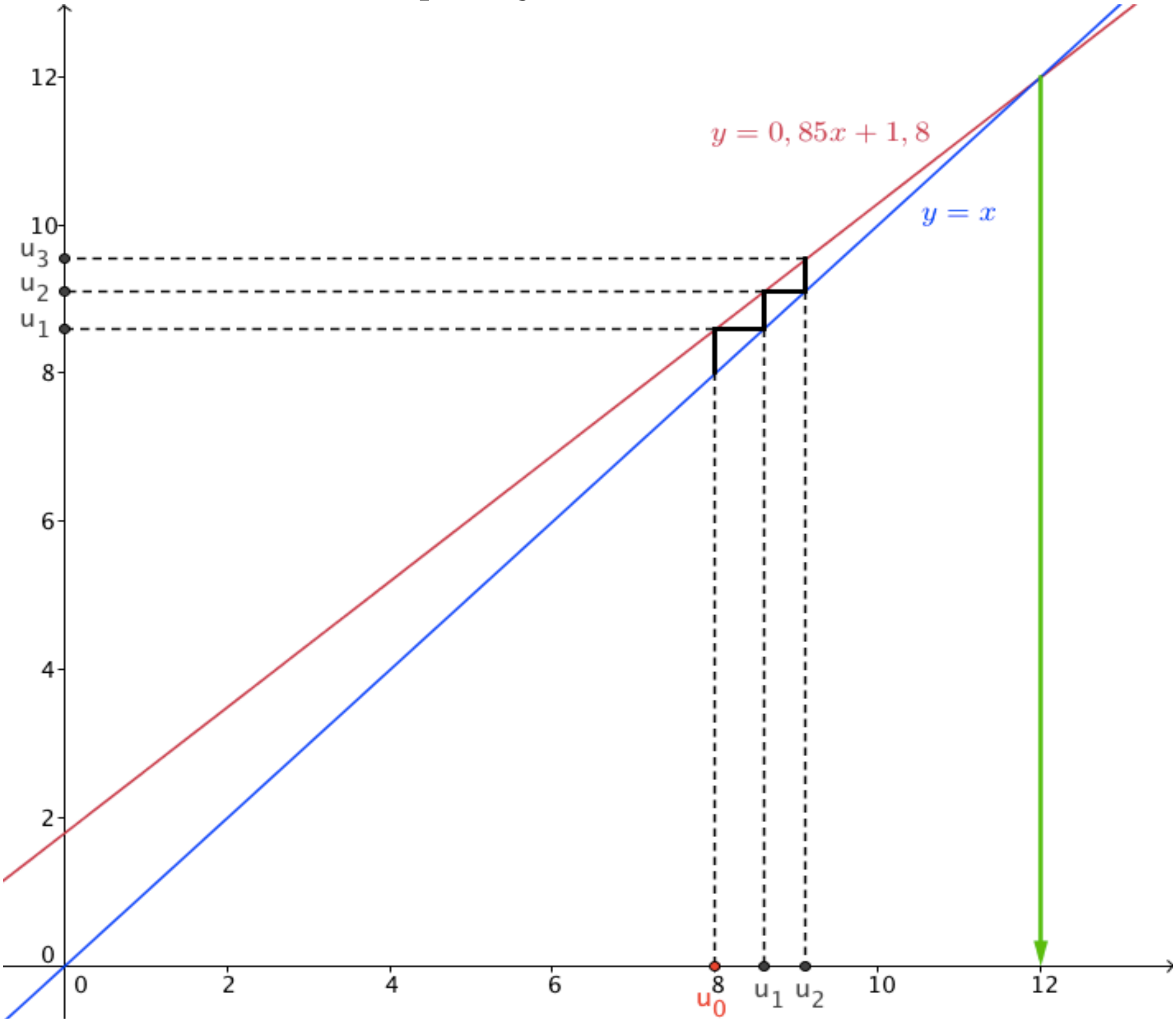
- Admis -

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Vidéo **https://youtu.be/L7bBL4z-r90**
Vidéo **https://youtu.be/LDRx7aS9JsA**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.
1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f définie par
$f(x) = 0{,}85x + 1{,}8$.
   a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0{,}85x + 1{,}8$ et $y = x$.
   b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.
   c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

Correction
1) a) b) - On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses. On trace l'image de u_0 par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées $u_1 = f(u_0)$.
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- On fait de même pour obtenir u_2 puis u_3…



c) En continuant le tracé en escalier, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

2) La suite (u_n) converge et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. La limite L de la suite (u_n) est donc solution de l'équation $f(L) = L$.
Soit : $0,85L + 1,8 = L$
$L - 0,85L = 1,8$
$0,15L = 1,8$
$L = 1,8 : 0,15 = 12$
La suite (u_n) converge vers 12.

Afficher la représentation graphique en escalier sur la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/bRlvVs9KZuk

Vidéo Casio https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ

Vidéo HP https://youtu.be/wML003kdLRo