# CONTINUITÉ DES FONCTIONS

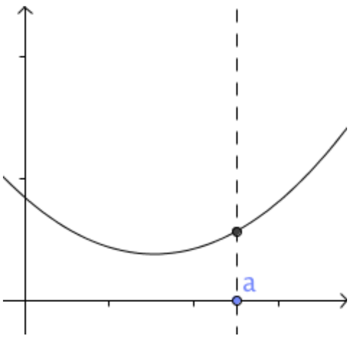
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/9SSEUoyHh2s

## I. Notion de continuité

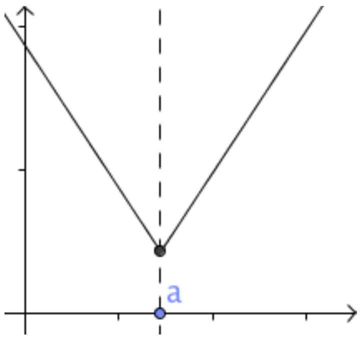
Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

**Vidéo** https://youtu.be/XpjKserte6o

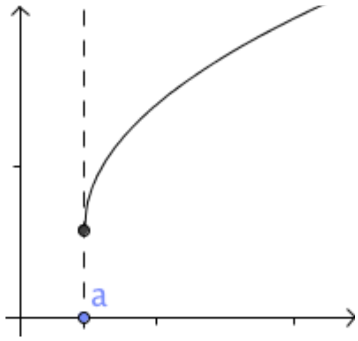
Exemples et contre-exemples :



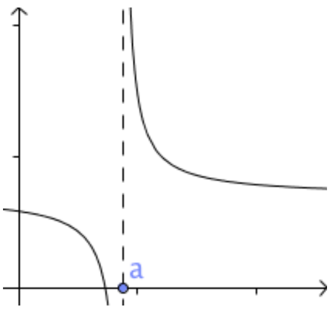

$f$ est continue en a



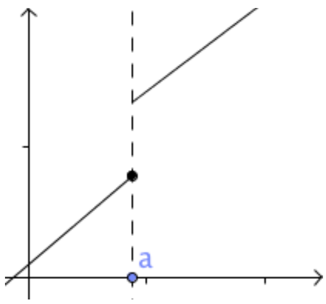

$f$ est continue en a




$f$ est continue en a




$f$ n'est pas continue en a




$f$ n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ contenant un réel $a$.
- $f$ est continue en $a$ si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- $f$ est continue sur $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$.

Exemples :

- Les fonctions $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\ ; 0[$ et elle est continue sur $]0\ ; +\infty[$.

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle $I$ est continue sur cet intervalle.

*- Admis -*

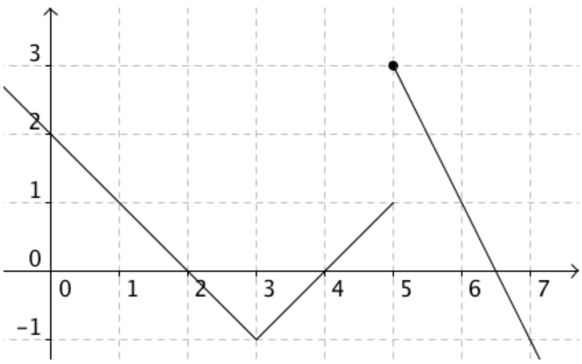
Méthode : Étudier la continuité d'une fonction

**Vidéo** https://youtu.be/03WMLyc7rLE

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2,\ pour\ x < 3. \\ x-4,\ pour\ 3 \leq x < 5 \\ -2x+13,\ pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

Les fonctions $x \longmapsto -x+2$, $x \longmapsto x-4$ et $x \longmapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction $f$ est continue sur $]-\infty\ ; 3[$, sur $[3\ ;\ 5[$ et sur $[5\ ;\ +\infty[$.




Étudions alors la continuité de $f$ en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} -x+2 = -3+2 = -1$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x-4 = 3-4 = -1$

Donc : $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$

donc la fonction $f$ est continue en 3.

- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} x-4 = 5-4 = 1$

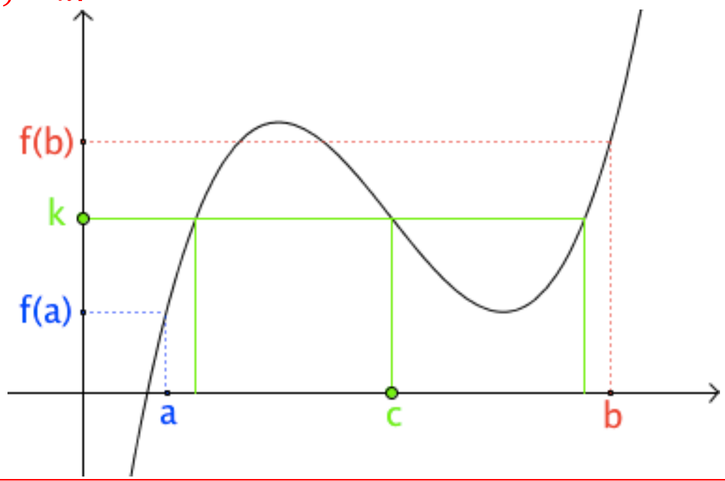
$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} -2x+13 = -2 \times 5 + 13 = 3$

La limite de $f$ en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.
La fonction $f$ n'est donc pas continue en 5.

La fonction $f$ est continue sur $]-\infty\ ; 5[$ et sur $[5\ ;\ +\infty[$.

# II. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :
On considère la fonction $f$ définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.




*- Admis -*

Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Cas particuliers :
- Dans le cas où la fonction $f$ est strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ alors le réel $c$ est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = 0$.

Dans la pratique, pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, on démontre que :
1. $f$ est continue sur $[a\ ;\ b]$,
2. $f$ change de signe sur $[a\ ;\ b]$,
3. $f$ est strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$.

Les conditions 1 et 2 nous assurent de l'existence de la solution. La condition 3 apporte en plus son unicité.

Méthode : Résolution approchée d'une équation

**EXEMPLE 1**

**Vidéo** https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2{,}5\ ;\ 5]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution $\alpha$.

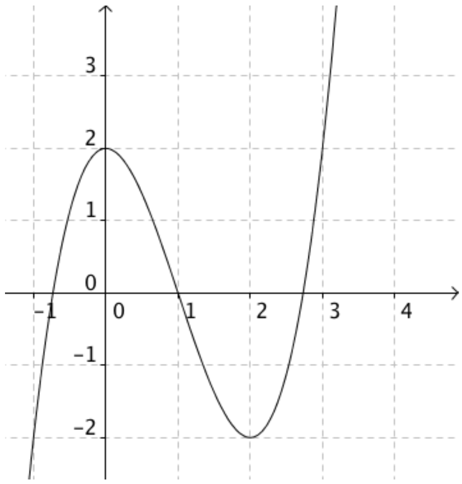
1) • <u>Existence de la solution :</u>

- La fonction $f$ est **continue** sur l'intervalle $[2,5\,;5]$.
- $f(2{,}5)=2{,}5^3-3\times 2{,}5^2+2=-1{,}125<0$
  $f(5)=5^3-3\times 5^2+2=52>0$

Donc la fonction $f$ **change de signe** sur l'intervalle $[2,5\,;5]$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution.

• <u>Unicité de la solution :</u>
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
Donc, pour tout $x$ de $[2,5\,;5]$, $f'(x)>0$.
La fonction $f$ est donc **strictement croissante** sur l'intervalle $[2,5\,;5]$.
On en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[2,5\,;5]$.




2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

**Vidéo TI** https://youtu.be/MEkh0fxPakk
**Vidéo Casio** https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ
**Vidéo HP** https://youtu.be/93mBoNOpEWg

| X | Y1 |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 0 |
| 2 | -2 |
| 3 | 2 |
| 4 | 18 |
| 5 | 52 |
| 6 | 110 |

La solution est comprise entre 2 et 3.

| X | Y1 |
|---|---|
| 2 | -2 |
| 2.1 | -1.969 |
| 2.2 | -1.872 |
| 2.3 | -1.703 |
| 2.4 | -1.456 |
| 2.5 | -1.125 |
| 2.6 | -.704 |

La solution est supérieure à 2,6

| X | Y1 |
|---|---|
| 2.4 | -1.456 |
| 2.5 | -1.125 |
| 2.6 | -.704 |
| 2.7 | -.187 |
| 2.8 | .432 |
| 2.9 | 1.159 |
| 3 | 2 |

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

| X | Y1 |
|---|---|
| 2.7 | -.187 |
| 2.71 | -.1298 |
| 2.72 | -.0716 |
| 2.73 | -.0123 |
| 2.74 | .04802 |
| 2.75 | .10938 |
| 2.76 | .17178 |

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2{,}73 < \alpha < 2{,}74$.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

TP Algorithmique "Dichotomie" :
*http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_SolEqua.pdf*

**EXEMPLE 2**

**Vidéo** **https://youtu.be/UmGQf7gkvLg**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

- $f$ est continue sur [–1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 6 = 1$
$f(4) = 4^3 - 4 \times 4^2 + 6 = 6$
Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle [–1 ; 4].

## III. Application à l'étude d'une suite

### 1) Image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème :
Soit une fonction $f$ définie et continue sur un intervalle $I$ et soit une suite $(u_n)$ telle que pour tout $n$, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)$ converge vers $L$ de $I$ alors $f(L) = L$.

- Admis -

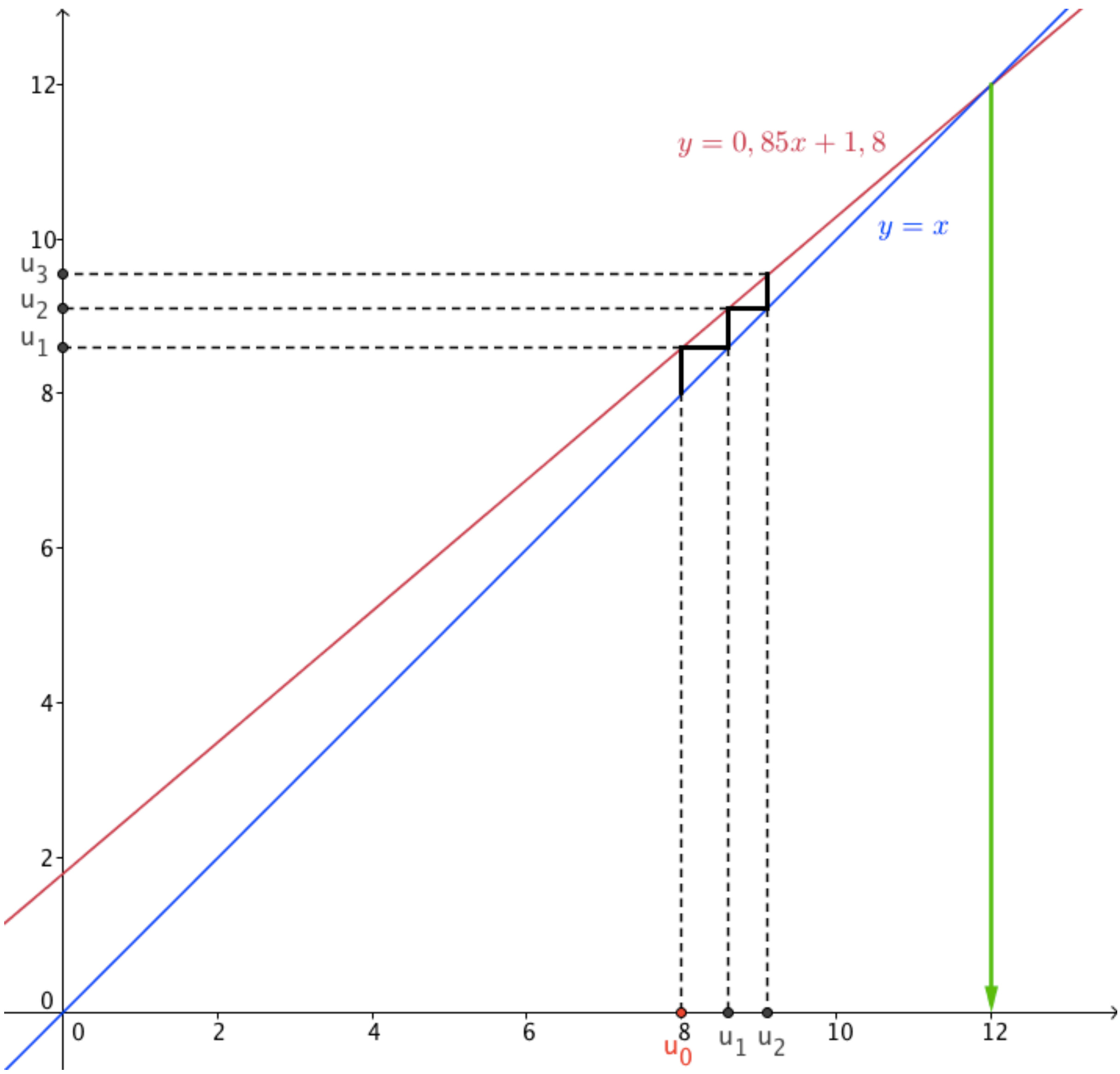
Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

**Vidéo** **https://youtu.be/L7bBL4z-r90**
**Vidéo** **https://youtu.be/LDRx7aS9JsA**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction $f$ définie par
$f(x) = 0,85x + 1,8$.
a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.
b) Dans ce repère, placer $u_0$ sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe $u_1$, $u_2$ et $u_3$. On laissera apparent les traits de construction.
c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite $(u_n)$.
2) En supposant que la suite $(u_n)$ est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

1) a) b) - On place le premier terme $u_0$ sur l'axe des abscisses. On trace l'image de $u_0$ par $f$ pour obtenir sur l'axe des ordonnées $u_1 = f(u_0)$.
- On reporte $u_1$ sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- On fait de même pour obtenir $u_2$ puis $u_3$…



c) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite $(u_n)$ est 12.

2) La suite $(u_n)$ converge et la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. La limite $L$ de la suite $(u_n)$ est donc solution de l'équation $f(L) = L$.
Soit : $0{,}85L + 1{,}8 = L$
$L - 0{,}85L = 1{,}8$
$0{,}15L = 1{,}8$
$L = 1{,}8 : 0{,}15 = 12$

**Afficher la représentation graphique sur la calculatrice :**

**Vidéo TI** https://youtu.be/bRlvVs9KZuk

**Vidéo Casio** https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ

**Vidéo HP** https://youtu.be/wML003kdLRo

2) Variation d'une suite à l'aide d'une fonction associée

Propriété : Soit une fonction $f$ définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
- Si $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $f$ est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

Méthode : Étudier les variations d'une suite à l'aide de sa fonction associée

**Vidéo** https://youtu.be/dPR3GyQycH0

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on donne la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$.
Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

On considère la fonction associée $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Ainsi $u_n = f(n)$.

Étudions les variations de $f$ :
$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$.

Pour tout $x$ de $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) < 0$.

Donc $f$ est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. On en déduit que $(u_n)$ est décroissante.