# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

**Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/5oBnmZVrOXE**

## Partie 1 : Probabilités conditionnelles et tableaux

Définition :
On appelle **probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$**, la probabilité que l'événement $B$ se réalise sachant que l'événement $A$ est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Remarque : On rappelle que, comme pour les probabilités simples, on a :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1$$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide d'un tableau

**Vidéo** https://youtu.be/7tS60nk6Z2I

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

| | Médicament A | Médicament B | Total |
|---|---|---|---|
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :
$A$ : « Le patient a pris le médicament A. »
$G$ : « Le patient est guéri. »
Calculer : a) $P(A)$ b) $P(G)$ c) $P(G \cap A)$ d) $P(\bar{G} \cap A)$

2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.
Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri.
b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.
Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B.

**Correction**

1) a) La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à :
$P(A) = \dfrac{455}{800} \approx 0{,}57 = 57\ \%$.

b) La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à : $P(G) = \dfrac{674}{800} \approx 0{,}84 = 84\ \%$.

c) La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à
$P(G \cap A) = \dfrac{383}{800} \approx 0{,}48 = 48\ \%$.

d) La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à : $P(\bar{G} \cap A) = \frac{72}{800} \approx 0{,}09 = 9\ \%$.

2) a)

| | Médicament A | Médicament B | Total |
|---|---|---|---|
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

La probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri se note $P_G(A)$ et est égale à $P_G(A) = \frac{383}{674} \approx 0{,}57 = 57\ \%$. On regarde uniquement la ligne des patients guéris.

b)

| | Médicament A | Médicament B | Total |
|---|---|---|---|
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

La probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B se note $P_{\bar{A}}(G)$ et est égale à $P_{\bar{A}}(G) = \frac{291}{345} \approx 0{,}84 = 84\ \%$. On regarde uniquement la colonne du médicament B.

Propriété : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide de la formule

**Vidéo** https://youtu.be/SWmkdKxXf_I

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit $A$ l'événement : « Le résultat est un pique ».
Soit $B$ l'événement : « Le résultat est un roi ».
Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

**Correction**

$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} : \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Remarque : On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, parmi les piques, on a 1 chance sur 8 d'obtenir le roi.

# Partie 2 : Arbre pondéré et probabilités totales

## 1) Propriétés

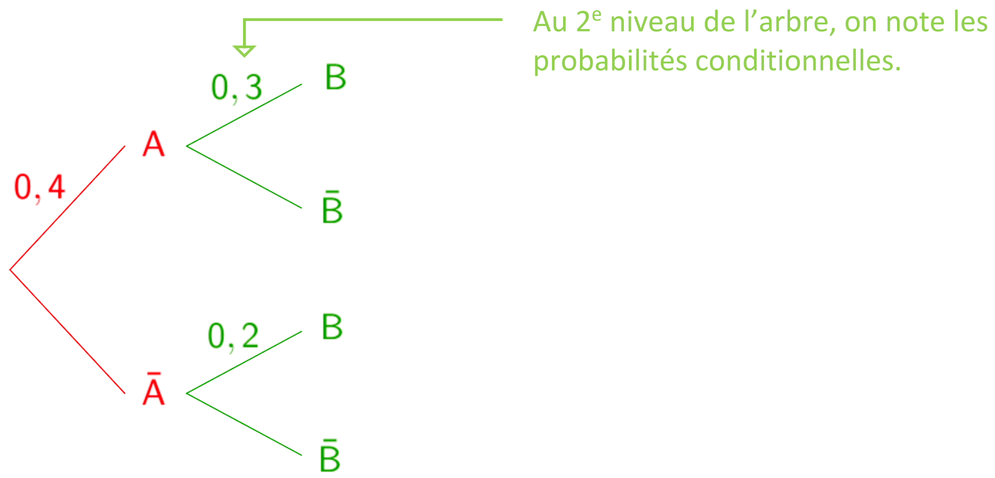
Formules : Soit $A$ et $B$ deux événements avec $P(A) \neq 0$.
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

## 2) Construire un arbre pondéré

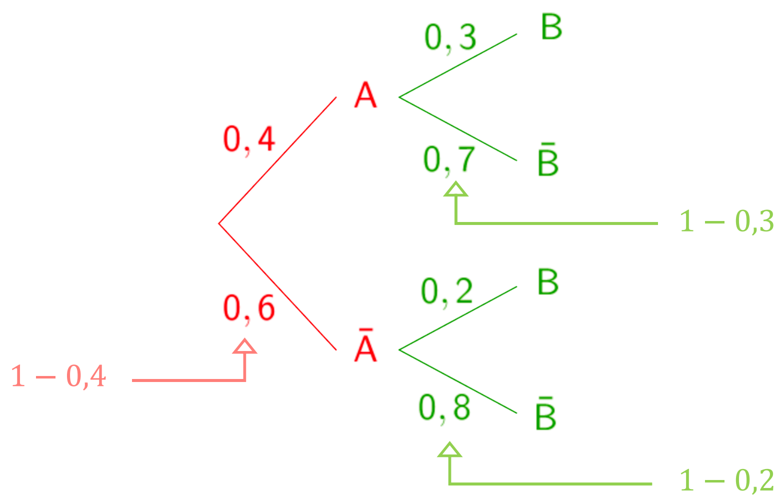
Exemple :
**Vidéo** https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo

On donne : $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$

● On reporte ces probabilités dans l'arbre :

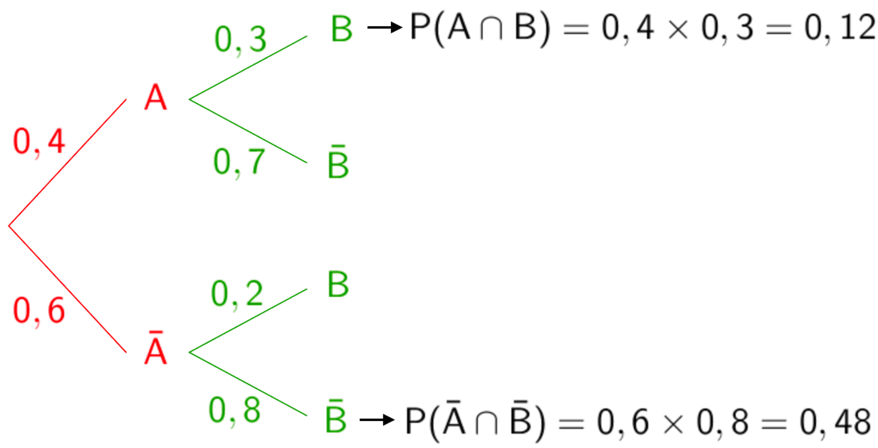



● On complète les probabilités manquantes :




On utilise la formule :
$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$

• On calcule les probabilités d'intersections :




On utilise la formule :
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

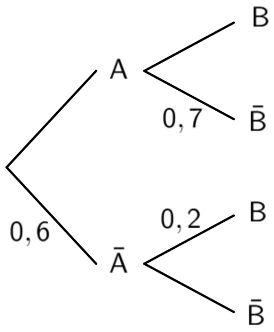
Méthode : Construire un arbre pondéré

**Vidéo** https://youtu.be/o1HQ6xJ7o4U

On donne l'arbre pondéré ci-contre.

a) Traduire les données de l'arbre sous forme de probabilités.

b) À l'aide de l'arbre, calculer $P(A)$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ et $P(A \cap \bar{B})$.



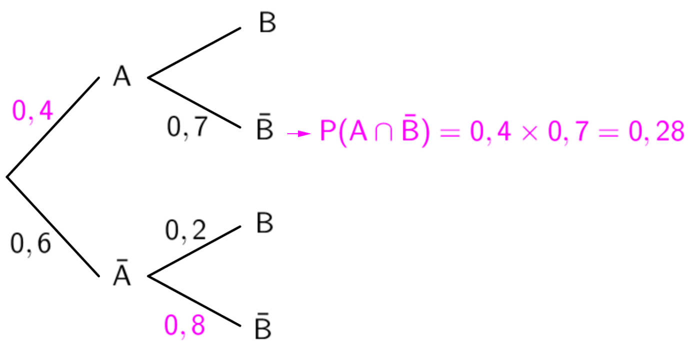

**Correction**

a) $P(\bar{A}) = 0{,}6$, $P_A(\bar{B}) = 0{,}7$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}2$.

b) • $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

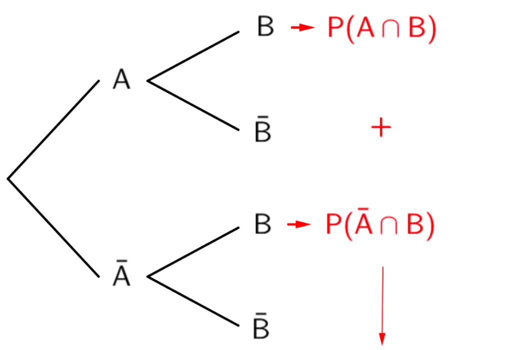
• $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

• $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
$= 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$




3) Formule des probabilités totales

Propriété :




$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

(Formule des probabilités totales)

Méthode : Appliquer la formule des probabilités totales

**Vidéo** https://youtu.be/qTpTBoZA7zY

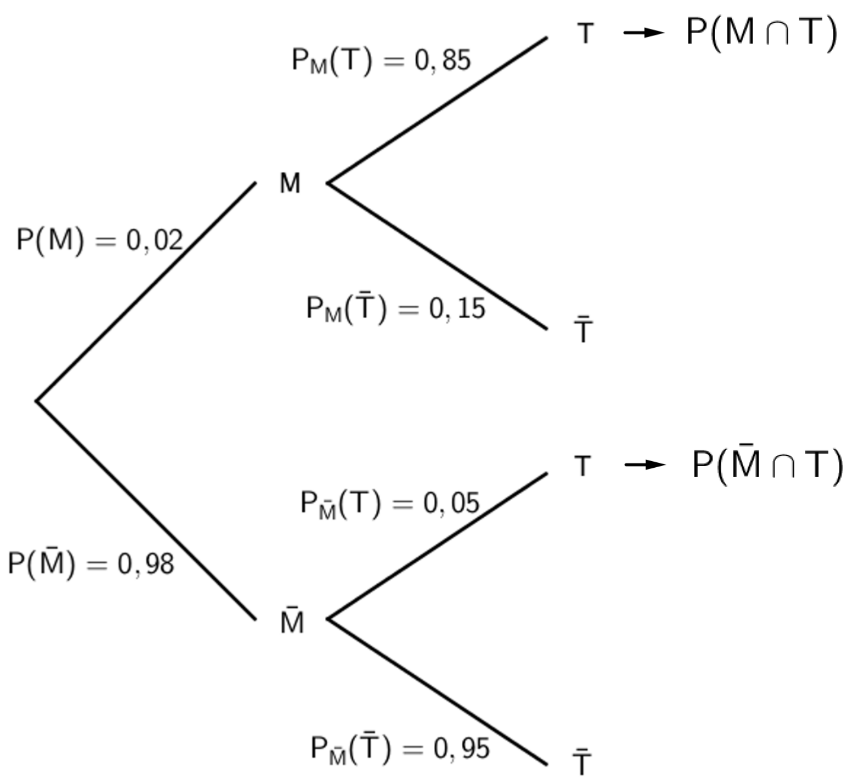
Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement $M$ et $T$ les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

a) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
b) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

*D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010*

**Correction**

a) On construit et on complète un arbre pondéré :




D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$
$= 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066.$
La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6 %.

b) $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26$.
La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26 %.

## Partie 3 : Probabilités et indépendance

Définition : On dit que deux évènements $A$ et $B$ de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Exemples :

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit $R$ l'événement : « On tire un roi ».
Soit $T$ l'événement : « On tire un trèfle ».

On a : $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
Par ailleurs, $P_T(R)$ est la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles. On a alors :
$P_T(R) = \frac{1}{8}$
Ainsi, $P_T(R) = P(R)$.
Les événements $R$ et $T$ sont donc indépendants.

b) On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Ainsi :
$P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$.
$P_T(R) = \frac{1}{8}$
Ainsi, $P_T(R) \neq P(R)$.
Les événements $R$ et $T$ ne sont donc pas indépendants.

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux événements

**Vidéo** https://youtu.be/fcmwzbnz2F4

Dans une population, un individu est atteint par la maladie $a$ avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie $b$ avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit $A$ l'événement "L'individu a la maladie $a$".
Soit $B$ l'événement "L'individu a la maladie $b$".
On suppose que les événements $A$ et $B$ sont indépendants.
a) Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies.
b) Calculer $P(A \cup B)$. Interpréter le résultat.

**Correction**

a) La probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies est $P(A \cap B)$.

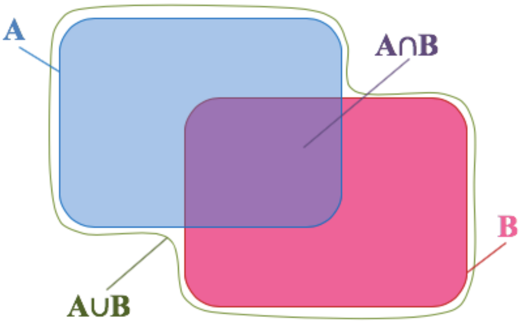
Or, d'après la formule de probabilité conditionnelle, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Soit : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$
$= P(A) \times P(B)$, car $A$ et $B$ sont indépendants.
$= 0{,}005 \times 0{,}01$
$= 0{,}000\ 05$

La probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies est égale à 0,00005.

b) On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}005 + 0{,}01 - 0{,}000\ 05$
$= 0{,}014\ 95$




La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à 1,495 %.