# COMPOSITION DE FONCTIONS

## Partie 1 : Composée de deux fonctions

Exemple : On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$
La fonction $f$ est la composée de deux fonctions $u$ et $v$ telles que :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x-3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont définies par : $u(x) = x-3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On dit que la fonction $f$ est la composée de $u$ par $v$ et on note :

$$f(x) = v \circ u\,(x) = v(u(x)) = \sqrt{x-3}$$

Définition : On appelle **fonction composée** de $u$ par $v$ la fonction notée $v \circ u$ définie par :
$v \circ u\,(x) = v(u(x))$.

Méthode : Identifier la composée de deux fonctions

Vidéo https://youtu.be/08HgDgD6XL8

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction $f$.

**Correction**
Dans $f$, on reconnait la fonction inverse et la fonction carré.
Si on pose : $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$
On a alors : $f(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{u(x)} = v(u(x)) = v \circ u\,(x)$.
La fonction $f$ est la composée de la fonction carré par la fonction inverse.

Méthode : Composer deux fonctions

Vidéo https://youtu.be/sZ2zqEz4hug

On considère les fonctions $u$ et $v$ définies par : $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$.
Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de $x$.

**Correction**
On a : $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = \frac{x^2+x}{x^2+x+1}$$

$u \circ v(x) = u(v(x)) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{x}{x+1}$

## Partie 2 : Formules de dérivation d'une fonction composée

### 1) Cas particuliers de fonctions composées

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ | $nu'u^{n-1}$ |
| $e^u$ | $u'e^u$ |
| $\ln u$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $\cos u$ | $-u' \sin u$ |
| $\sin u$ | $u' \cos u$ |

Méthode : Déterminer la dérivée de fonctions composées

**Vidéo** https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

**Vidéo** https://youtu.be/-zrhBc9xdRs

Déterminer les dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$ b) $g(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$ c) $h(x) = \ln(2x - x^2)$

**Correction**

a) On pose : $f(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

Donc : $f'(x) = 4u'(x)(u(x))^3$

$= 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$

b) On pose : $g(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Donc : $g'(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$

$= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$

$= -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

c) On pose : $h(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x - x^2 \rightarrow u'(x) = 2 - 2x$

Donc : $h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$= \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$

2) Cas général

Propriété : $(v(u(x)))' = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$ ou encore $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée (cas général)

Vidéo https://youtu.be/lwcFgnbs0Ew

Déterminer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

**Correction**

On considère les fonctions $u$ et $v$ définies par : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$

Alors : $f(x) = \sqrt{x^2+1} = v\big(u(x)\big)$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc : $f'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$

$$= 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

## Partie 3 : Formules de primitives des fonctions composées

| Fonction | Une primitive |
|---|---|
| $f(ax+b)$ | $\frac{1}{a}F(ax+b)$ où $F$ est une primitive de $f$ |
| $u'u^n$ <br> $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ |
| $u'e^u$ | $e^u$ |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln u$ |
| $u' \cos u$ | $\sin u$ |
| $u' \sin u$ | $-\cos u$ |

Méthode : Recherche de primitives

Vidéo https://youtu.be/dvVfFxbRT5M
Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g

Dans chaque cas, déterminer une primitive $F$ de la fonction $f$.

a) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ b) $f(x) = xe^{x^2}$
c) $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(3x-1)$

**Correction**
a) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ du type $u'u^n$
avec $u(x) = x^2-5x+4 \rightarrow u'(x) = 2x-5$
Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$, avec $n = 2$.
Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-5x+4)^3$

b) $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}2xe^{x^2}$ du type $u'e^u$ avec $u(x) = x^2 \rightarrow u'(x) = 2x$
Une primitive de $u'e^u$ est de la forme $e^u$.
Soit : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

c) $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(3x-1) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) - 3\sin(3x-1)$
Donc $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \cos(3x-1)$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

**Vidéo** https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw
**Vidéo** https://youtu.be/BhrCsm5HaxQ
**Vidéo** https://youtu.be/uVMRZSmYcQE

Calculer :

$$\int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx$$

**Correction**
On note : $f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$
Une primitive de $f$ est $F$ tel que : $F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x}$
Donc :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx &= \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1)\\ &= \frac{1}{-2}e^{-2\times 1} - \frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}\\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\end{aligned}$$