

PGCD ET NOMBRES PREMIERS

I. PGCD de deux entiers

1) Définition et propriétés

Exemple :

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/sC2iPY27Ym0>

Tous les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Tous les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

Les diviseurs communs à 60 et 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20

Le plus grand diviseur commun à 60 et 100 est 20. On le nomme le *PGCD* de 60 et 100.

Définition : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
On appelle *PGCD* de a et b le plus grand commun diviseur de a et b et note $PGCD(a; b)$.

Remarque :

On peut étendre cette définition à des entiers relatifs. Ainsi dans le cas d'entiers négatifs, la recherche du *PGCD* se ramène au cas positif.

Par exemple, $PGCD(-60; 100) = PGCD(60; 100)$.

On a ainsi de façon générale : $PGCD(|a|; |b|) = PGCD(a; b)$.

Propriétés : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

a) $PGCD(a; 0) = a$

b) $PGCD(a; 1) = 1$

c) Si b divise a alors $PGCD(a; b) = b$

Démonstration de c :

Si b divise a alors tout diviseur de b est un diviseur de a . Donc le plus grand diviseur de b (qui est b) est un diviseur de a .

2) Algorithme d'Euclide



C'est avec *Euclide d'Alexandrie* (-320? ; -260?), que les théories sur les nombres premiers se mettent en place.

Dans « *Les éléments* » (livres VII, VIII, IX), il donne des définitions, des propriétés et démontre certaines affirmations du passé, comme l'existence d'une infinité de nombres premiers.

« Les nombres premiers sont en quantité plus grande que toute quantité proposée de nombres premiers ».

Il présente aussi la décomposition en facteurs premiers liée à la notion de *PGCD*.

Propriété : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
 Soit r est le reste de la division euclidienne de a par b .
 On a : $PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r)$.

Démonstration :

On note respectivement q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

Si D un diviseur de b et r alors D divise $a = bq + r$ et donc D est un diviseur de a et b .
 Réciproquement, si D un diviseur de a et b alors D divise $r = a - bq$ et donc D est un diviseur de b et r .

On en déduit que l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de b et r . Et donc en particulier, $PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r)$.

Méthode : Recherche de $PGCD$ par l'algorithme d'Euclide

 Vidéo https://youtu.be/npG_apk18o

Déterminer le $PGCD$ de 252 et 360.

On applique l'algorithme d'Euclide :

$$360 = 252 \times 1 + 108$$

$$252 = 108 \times 2 + 36$$

$$108 = 36 \times 3 + 0$$

Le dernier reste non nul est 36 donc $PGCD(252 ; 360) = 36$.

En effet, d'après la propriété précédente :

$$PGCD(252 ; 360) = PGCD(252 ; 108) = PGCD(108 ; 36) = PGCD(36 ; 0) = 36$$

Il est possible de vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice :

Avec une TI 82/83 :

Touche "MATH" puis menu "NBRE" :

```

PGCD(252, 360)
.....36

```

Avec une Casio 35+ :

Touche "OPTION" puis "⇨" (=touche F6).

Choisir "Num" puis "⇨".

Et choisir "GCD".

```

GCD(252, 360)
36

```

TP info sur tableur : L'algorithme d'Euclide

<http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Euclide.pdf>

<http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Euclide.ods> (feuille de calcul 00o)

TP info sur tableur : L'algorithme le plus performant

http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Compa_algo.pdf

http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Compa_algo.ods (feuille de calcul 00o)

Propriété : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur $PGCD$.

Démonstration :

On a démontré précédemment que l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de b et r .

En poursuivant par divisions euclidiennes successives, on obtient une liste strictement décroissante de restes r, r_1, r_2, r_3, \dots . En effet, on a successivement :

$$0 \leq r < b, 0 \leq r_1 < r, 0 \leq r_2 < r_1, 0 \leq r_3 < r_2, \dots$$

Il n'existe qu'un nombre fini d'entiers compris entre 0 et r .

Il existe donc un rang k tel que $r_k \neq 0$ et $r_{k+1} = 0$.

Ainsi l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de r_k et 0.

A noter qu'à ce niveau ce résultat démontre le fait que dans l'algorithme d'Euclide, le dernier reste non nul est égal au $PGCD$ de a et b . En effet, $PGCD(r_k ; 0) = r_k$.

On en déduit que l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de r_k .

Exemple :

 Vidéo <https://youtu.be/lel0FUKjEcs>

Chercher les diviseurs communs de 2730 et 5610 revient à chercher les diviseurs de leur $PGCD$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $PGCD(2730 ; 5610) = 30$.

Les diviseurs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30.

Donc les diviseurs communs à 2730 et 5610 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30.

Propriété : Soit a, b et k des entiers naturels non nuls.
 $PGCD(ka ; kb) = k \times PGCD(a ; b)$

Démonstration :

En appliquant l'algorithme d'Euclide, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} PGCD(ka ; kb) &= PGCD(kb ; kr) = PGCD(kr ; kr_1) = PGCD(kr_1 ; kr_2) = \dots \\ &= PGCD(kr_k ; 0) = kr_k = k \times PGCD(a ; b) \end{aligned}$$

Exemple :

 Vidéo https://youtu.be/ElcXmEi_HPs

Chercher le $PGCD$ de 420 et 540 revient à chercher le $PGCD$ de 21 et 27.

En effet, $420 = 2 \times 10 \times 21$ et $540 = 2 \times 10 \times 27$.

Or $PGCD(21 ; 27) = 3$ donc $PGCD(420 ; 540) = 2 \times 10 \times 3 = 60$.

II. Théorème de Bézout et théorème de Gauss

1) Nombres premiers entre eux

Définition : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque leur $PGCD$ est égal à 1.

Exemple :

 **Vidéo** <https://youtu.be/Rno1eANN7aY>

42 et 55 sont premiers entre eux en effet $PGCD(42 ; 55) = 1$.

2) Théorème de Bézout

Propriété (Identité de Bézout) : Soit a et b deux entiers naturels non nuls et d leur $PGCD$.
Il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = d$.

Démonstration au programme :

On appelle E l'ensemble des entiers strictement positifs de la forme $am + bn$ avec m et n entiers relatifs.

a et $-a$ appartiennent par exemple à E donc E est non vide et E contient un plus petit élément strictement positif noté d .

- Démontrons que $PGCD(a ; b) \leq d$:

$PGCD(a ; b)$ divise a et b donc divise d et donc $PGCD(a ; b) \leq d$.

- Démontrons que $d \leq PGCD(a ; b)$:

On effectue la division euclidienne de a par d :

Il existe un unique couple d'entiers $(q ; r)$ tel que $a = dq + r$ avec $0 \leq r < d$

On a alors :

$$r = a - dq = a - (au + bv)q = a - auq - bvq = (1 - uq)a - vqb$$

Donc r est un élément de E plus petit que d ce qui est contradictoire et donc $r = 0$.

On en déduit que d divise a . On montre de même que d divise b et donc $d \leq PGCD(a ; b)$.

On conclut que $d = PGCD(a ; b)$ et finalement, il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = PGCD(a ; b)$.

Exemple :

 **Vidéo** <https://youtu.be/HSrIYM8ufoE>

On a par exemple : $PGCD(54 ; 42) = 6$.

Il existe donc deux entiers u et v tels que : $54u + 42v = 6$.

Le couple $(-3 ; 4)$ convient. En effet : $54 \times (-3) + 42 \times 4 = 6$.

Théorème de Bézout : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
 a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration :

- Si a et b sont premiers entre eux alors le résultat est immédiat d'après l'identité de Bézout.

- Supposons qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

$PGCD(a; b)$ divise a et b donc divise $au + bv = 1$.

Donc $PGCD(a; b) = 1$. La réciproque est prouvée.

Exemple :

22 et 15 sont premiers entre eux.

On est alors assuré que l'équation $22x + 15y = 1$ admet un couple solution d'entiers relatifs.

Méthode : Démontrer que deux entiers sont premiers entre eux

 Vidéo <https://youtu.be/oJuQv8guLJk>

Démontrer que pour tout entier naturel n , $2n + 3$ et $5n + 7$ sont premiers entre eux.

$$5(2n + 3) - 2(5n + 7) = 10n + 15 - 10n - 14 = 1$$

D'après le théorème de Bézout, avec les coefficients 5 et -2 , on peut affirmer que $2n + 3$ et $5n + 7$ sont premiers entre eux.

Propriété : Un entier a admet un inverse modulo n , si a et n sont premiers entre eux.

Méthode : Déterminer un inverse modulo n

 Vidéo <https://youtu.be/PI4FaV5GZvc>

a) Déterminer un inverse de 5 modulo 16.

b) En déduire les solutions de l'équation $5x \equiv 7[16]$.

a) 5 et 16 sont premiers entre eux, donc 5 admet un inverse modulo 16.

Déterminons cet inverse :

x est inverse de 5 modulo 16, si $5x \equiv 1[16]$.

Or x est nécessairement congru à l'un des entiers 0, 1, 2, 3, ... ou 15 modulo 16.

Par disjonction des cas, on a :

x modulo 16	0	1	2	3	...
$5x$ modulo 16	0	5	10	-1	

On peut arrêter la recherche car si $5 \times 3 \equiv -1[16]$ alors $5 \times (-3) \equiv 1[16]$.

Ainsi -3 est un inverse de 5 modulo 16.

b) $5x \equiv 7[16]$.

Pour « se débarrasser » du facteur 5, on va multiplier les deux membres par un inverse de 5 :

Soit : $-3 \times 5x \equiv -3 \times 7[16]$,

$$-15x \equiv -21[16]$$

$$1x \equiv -21[16] \text{ car } -15 \equiv 1[16].$$

Soit encore :

$$x \equiv 11[16]$$

Réciproquement :

$$\text{Si } x \equiv 11[16] \text{ alors } 5 \times x \equiv 5 \times 11[16]$$

$$5x \equiv 55[16]$$

$$5x \equiv 7[16].$$

On en déduit que $x \equiv 11[16]$.

Les entiers x solutions sont tous les entiers de la forme $11 + 16k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3) Théorème de Gauss

Théorème de Gauss : Soit a , b et c trois entiers naturels non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c .

Démonstration au programme :

a divise bc donc il existe un entier k tel que $bc = ka$.

a et b sont premiers entre eux donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que :
 $au + bv = 1$.

Soit : $acu + bcv = c$ soit encore $acu + kav = c$

Et donc $a(cu + kv) = c$

On en déduit que a divise c .

Corollaire : Soit a , b et c trois entiers naturels non nuls.

Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux alors ab divise c .

Démonstration :

a et b divisent c donc il existe deux entiers k et k' tel que $c = ka = k'b$.

Et donc a divise $k'b$.

a et b sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, a divise k' .

Il existe donc un entier k'' tel que $k' = ak''$.

Comme $c = k'b$, on a $c = ak''b = k''ab$

Et donc ab divise c .

Exemple :

6 et 11 divisent 660,

6 et 11 sont premiers entre eux,

donc 66 divise 660.

Remarque :

Intuitivement, on pourrait croire que la condition « a et b sont premiers entre eux » est inutile.

Prenons un contre-exemple :

6 et 9 divisent 18,

6 et 9 ne sont pas premiers entre eux,

et $6 \times 9 = 54$ ne divise pas 18.

Méthode : Appliquer le théorème de Gauss

Vidéo https://youtu.be/vTqgk96T_Fo

- a) Soit un entier naturel n . On suppose que $5n$ est un multiple de 3. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?
 b) Soit un entier naturel n multiple de 7 et de 11. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?

a) $5n$ est un multiple de 3 donc 3 divise $5n$.
 Or, 3 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise n .
 Et donc : $n = 3k, k \in \mathbb{N}$.

b) n est multiple de 7 et de 11, donc 7 et 11 divisent n .
 Or, 7 et 11 sont premiers entre eux, donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $7 \times 11 = 77$ divise n .
 Et donc : $n = 77k, k \in \mathbb{N}$.

Méthode : Résoudre une équation diophantienne (du type $ax + by = c$)

Vidéo <https://youtu.be/XpYK-F4hX24>

- a) Déterminer les entiers x et y tels que $5x + 7y = 1$.
 b) Déterminer les entiers x et y tels que $5x + 7y = 12$.

a) **SOLUTION PARTICULIÈRE :**

On a : $y = \frac{1-5x}{7}$. En choisissant $x = -4$, y est entier.

Ainsi, le couple $(-4 ; 3)$ est une solution particulière de l'équation.

SOLUTION GÉNÉRALE :

- Donc $5x + 7y = 5 \times (-4) + 7 \times 3$.

Soit $5(x + 4) = 7(3 - y)$.

5 divise $7(3 - y)$ et 5 et 7 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, 5 divise $3 - y$.

Il existe donc un entier k tel que $3 - y = 5k$, soit : $y = 3 - 5k$.

En substituant dans l'équation $5(x + 4) = 7(3 - y)$, on a :

$$5(x + 4) = 7(3 - 3 + 5k)$$

$$5x + 20 = 7 \times 5k$$

$$x = 7k - 4$$

- Réciproquement, on vérifie que le couple $(7k - 4 ; 3 - 5k)$ est solution de l'équation $5x + 7y = 1$:

$$5(7k - 4) + 7(3 - 5k) = 35k - 20 + 21 - 35k = 1$$

- Ainsi, les solutions sont de la forme $x = 7k - 4$ et $y = 3 - 5k$, avec k entier relatif.

b) On a vu que : $5 \times (-4) + 7 \times 3 = 1$ donc $5 \times (-4) \times 12 + 7 \times 3 \times 12 = 12$
 Soit encore : $5 \times (-48) + 7 \times 36 = 12$ et donc le couple $(-48 ; 36)$ est une solution particulière de l'équation.

En appliquant la même méthode qu'à la question a, on prouve que les solutions sont de la forme $x = 7k - 48$ et $y = 36 - 5k$, avec k entier relatif.

III. Nombres premiers



Les plus anciennes traces des nombres premiers ont été trouvées près du lac Edouard au Zaïre sur un os (de plus de 20000 ans), l'os d'Ishango, recouvert d'entailles marquant les nombres premiers 11, 13, 17 et 19.

Est-ce ici l'ébauche d'une table de nombres premiers ou cette correspondance est-elle due au hasard ?

1) Définition et propriétés

Définition : Un nombre entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Exemples et contre-exemples :

- 2, 3, 5, 7 sont des nombres premiers.
- 6 n'est pas un nombre premier car divisible par 2 et 3.
- 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur positif.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Propriété : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration au programme :

Soit un nombre premier n quelconque. Nous allons démontrer qu'il existe un nombre premier qui lui est plus grand.

On considère le produit $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times n$ de tous les nombres premiers compris entre 2 et n .

On pose alors : $M = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times n) + 1$.

- Si M est premier alors il existe un nombre premier plus grand que n car $(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times n) + 1 > n$.
- Si M n'est pas premier :

M admet donc au moins un diviseur premier p .

Supposons que p soit compris entre 2 et n , alors p divise $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times n$. Comme p divise également $M = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times n) + 1$, alors p divise 1. Ce qui est contradictoire. Donc p est plus grand que n .

Il existe donc un nombre premier p plus grand que n .

Propriété : Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 et non premier admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.

Démonstration :

Soit E l'ensemble des diviseurs de n autre que 1 et n . Cet ensemble est non vide car n n'est pas premier donc E admet un plus petit élément noté p .

p est premier car dans le cas contraire, p admettrait un diviseur autre que 1 et p . Ce diviseur serait plus petit que p et diviserait également n ce qui contredit le fait que p est le plus petit élément de E .

On peut écrire que $n = pq$ avec $p \leq q$ car p est le plus petit élément de E .

Donc $p \times p \leq p \times q = n$ et donc $p \leq \sqrt{n}$.

Remarque :

Pour savoir si un nombre n est premier ou non, la recherche de diviseurs peut s'arrêter au dernier entier premier inférieur à \sqrt{n} .

Méthode : Déterminer si un nombre est premier ou non

391 est-il premier ?

Pour le vérifier, on teste la divisibilité par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{391} \approx 19,8$.

Soit : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Les critères de divisibilités connus en classe du collège permettent de vérifier facilement que 391 n'est pas divisible par 2, 3 et 5.

En vérifiant par calcul pour 7, 11, 13 et 17, on constate que $391 : 17 = 23$.

On en déduit que 391 n'est pas premier.



Pierre de Fermat (1601 ; 1665) est l'auteur de la plus célèbre conjecture des mathématiques :

« L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution avec $x, y, z > 0$ et $n > 2$ ».

Fermat prétendait en détenir une preuve étonnante, mais il inscrivit dans la marge d'un ouvrage de *Diophante d'Alexandrie* ne pas avoir assez de place pour la rédiger !!!

Il a fallu attendre trois siècles et demi pour qu'en 1995, un anglais, *Andrew Wiles*, en vienne à bout et empoche récompenses et célébrité.

2) Décomposition en facteurs premiersExemple :

On veut décomposer 600 en produit de facteurs premiers.

$$600 = 6 \times 100 = 6 \times 10^2 = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

En effet, 2, 3 et 5 sont des nombres premiers.

Propriété : Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 se décompose en produit de facteurs premiers.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

On note $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$ avec p_1, p_2, \dots, p_r nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ entiers naturels non nuls.

Démonstration (difficile !) :Existence :

- Si n est premier, l'existence est démontrée.
- Sinon, le plus petit diviseur p_1 de n est premier et il existe un entier naturel n_1 tel que : $n = p_1 n_1$
 - Si n_1 est premier, l'existence est démontrée.
 - Sinon, le plus petit diviseur p_2 de n_1 est premier et il existe un entier naturel n_2 tel que : $n_1 = p_2 n_2$

On répète le processus pour obtenir une suite (n_k) décroissante et finie d'entiers naturels.

Ainsi, n se décompose en un produit de facteurs premiers du type :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}.$$

Unicité : On effectue une démonstration par récurrence

- Initialisation : Trivial pour $n = 2$.
- Hérité :
 - Hypothèse de récurrence :
Supposons qu'il existe un entier k strictement supérieur à 1, tel que la propriété soit vraie pour tout entier strictement inférieur à k :
La décomposition de tout entier strictement inférieur à k en produit de facteurs premiers est unique.
 - Démontrons que : La propriété est vraie au rang k : La décomposition de k en produit de facteurs premiers est unique.
Supposons qu'il existe deux décompositions distinctes :
 $k = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$.
Donc p_1 divise $q_1 q_2 \dots q_s$ et donc il existe un entier q_i tel que p_1 et q_i ne soient pas premiers entre eux. Comme p_1 et q_i sont premiers, on a $p_1 = q_i$.
Le nombre $l = \frac{k}{p_1}$ est inférieur à k et on a :
 $l = p_2 p_3 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_{i-1} q_{i+1} \dots q_s$
 l qui est inférieur à k admet donc deux décompositions distinctes ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de récurrence.
- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 2$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Propriété : Soit $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel n non nul.
Tout diviseur de n admet une décomposition en produit de facteurs premiers de la forme $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_r^{\beta_r}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Démonstration :

- $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_r^{\beta_r}$ divise $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$
- Réciproquement, soit d un diviseur de $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$.
Donc tout facteur premier de d divise n et est donc égal à p_1, p_2, \dots ou p_r .
Par extension, on en déduit que d peut s'écrire $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_r^{\beta_r}$
avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Exemple :

 Vidéo <https://youtu.be/1WMQ-iH7-7c>

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

Donc $2^2 \times 3^0 \times 5^1 = 20$ est un diviseur de 600.

Méthode : Déterminer un *PGCD* ou un *PPCM**

 Vidéo <https://youtu.be/2bIK1KkQ1k0>

* Plus Petit Commun Multiple

- a) Décomposer 17 640 et 411 600 en produits de facteurs premiers.
b) En déduire le *PGCD* et le *PPCM** de ces deux nombres.

$$\begin{aligned} \text{a) } 17\,640 &= 2 \times 8820 \\ &= 2^2 \times 4410 \\ &= 2^3 \times 2205 \\ &= 2^3 \times 3 \times 735 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 245 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 49 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 411\,600 &= 2 \times 205\,800 \\ &= 2^2 \times 102\,900 \\ &= 2^3 \times 51\,450 \\ &= 2^4 \times 25\,725 \\ &= 2^4 \times 3 \times 8575 \\ &= 2^4 \times 3 \times 5 \times 1715 \\ &= 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 343 \\ &= 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 49 \\ &= 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7^3 \end{aligned}$$

- b) Le *PGCD* de 17 640 et 411 600 est donc $2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 5880$
Le *PPCM* de 17 640 et 411 600 est donc $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3 = 1\,234\,800$

Méthode : Déterminer tous les diviseurs d'un entier

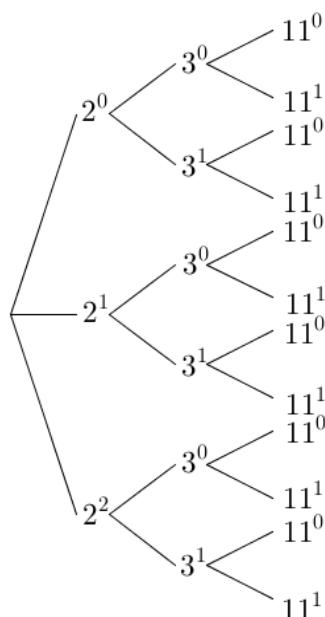
 Vidéo <https://youtu.be/k0rhj8fwdjs>

Déterminer tous les diviseurs de 132.

On décompose 132 en produit de facteurs premiers :

$$132 = 2 \times 66 = 2 \times 2 \times 33 = 2^2 \times 3 \times 11$$

On construit un arbre donnant tous les cas possibles :



En parcourant tous les chemins possibles de l'arbre, on obtient tous les diviseurs de 132.

Ainsi par exemple, $2^1 \times 3^0 \times 11^1 = 22$ est un diviseur de 132.

L'ensemble des diviseurs de 132 est : 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132.

Remarque : La décomposition permet également de déterminer le nombre de diviseurs d'un entier. Il s'agit du produit des exposants augmentés de 1 des facteurs premiers. Cela correspond au produit des branches de chaque niveau de l'arbre. Ainsi 132 possède $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ diviseurs.

3) Petit théorème de Fermat

Théorème : Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p , alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p .

Corollaire : Si p est un nombre premier et si a est un entier, alors $a^p - a$ est divisible par p .

Méthode : Appliquer le petit théorème de Fermat

▶ Vidéo <https://youtu.be/dMLtO6mB5yl>

Démontrer que pour tout entier naturel n , 7 divise $3^{6n} - 1$.

7 est un nombre premier et 7 est premier avec 3. Donc, d'après le petit théorème de Fermat, on a : 7 divise $3^{7-1} - 1$, soit :

$$3^{7-1} - 1 \equiv 0[7]$$

$$3^6 \equiv 1[7]$$

$$\text{Soit encore : } (3^6)^n \equiv 1^n[7]$$

$$3^{6n} \equiv 1[7]$$

$$3^{6n} - 1 \equiv 0[7]$$

Et donc, 7 divise $3^{6n} - 1$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales