

# DIVISIBILITÉ ET CONGRUENCES

## Partie 1 : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition : Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

$a$  **divise**  $b$  s'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $b = ka$ .

On dit également :

-  $a$  est un **diviseur** de  $b$ ,

-  $b$  est **divisible** par  $a$ ,

-  $b$  est un **multiple** de  $a$ .

Notation :  $a$  divise  $b$  se note :  $a|b$

Exemples :

- 56 est un multiple de  $-8$  car  $56 = -7 \times (-8)$
- L'ensemble des multiples de 5 sont  $\{\dots ; -15 ; -10 ; -5 ; 0 ; 5 ; 10 ; \dots\}$ . On note cet ensemble  $5\mathbb{Z}$ .
- L'ensemble des diviseurs de 6 sont  $\{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$
- 0 est divisible par tout entier relatif.

Rappel : Un nombre pair s'écrit sous la forme  $2k$ , avec  $k$  entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme  $2k + 1$ , avec  $k$  entier.

Propriété : Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs avec  $b$  non nul.

$b$  divise  $a \Leftrightarrow -b$  divise  $a \Leftrightarrow b$  divise  $-a \Leftrightarrow -b$  divise  $-a$

Propriété (transitivité) : Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers relatifs.

Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$  alors  $a$  divise  $c$ .

Démonstration :

Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$  alors il existe deux entiers relatifs  $k$  et  $k'$  tels que  $b = ka$  et  $c = k'b$ .

Donc  $c = k'ka$  et donc il existe un entier relatif  $l = kk'$  tel que  $c = la$ .

Donc  $a$  divise  $c$ .

Exemple :

- $3|12$  et  $12|60$  donc  $3|60$ .
- On peut appliquer également la contraposée de la propriété de transitivité :  
Comme 2 ne divise pas 1 001, aucun nombre pair ne divise 1 001.  
En effet, si par exemple 10 divisait 1 001 alors 2 diviserait 1 001.

Méthode : Appliquer la définition de la divisibilité (démonstration par l'absurde)

 **Vidéo** <https://youtu.be/z-CtTbP3RYA>

Démontrer que pour tout entier relatif  $n$ , le nombre  $6n + 5$  n'est pas divisible par 3.

**Correction**

On va effectuer un raisonnement par l'absurde en supposant le contraire de ce qu'il faut démontrer.

Si notre démonstration aboutit à une « absurdité », une contradiction, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons, *par l'absurde*, qu'il existe un entier relatif  $n$ , tel que  $6n + 5$  soit divisible par 3.

Il existe alors un entier relatif  $k$  tel que  $6n + 5 = 3k$ .

Soit :  $5 = 3k - 6n$ , soit encore :  $5 = 3(k - 2n)$ .

Ce qui signifie que 5 est divisible par 3. C'est « absurde », donc l'hypothèse de départ est fausse.

Le nombre  $6n + 5$  n'est pas divisible par 3

**Propriété (combinaisons linéaires) :** Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers relatifs.

Si  $c$  divise  $a$  et  $b$  alors  $c$  divise  $ma + nb$  où  $m$  et  $n$  sont deux entiers relatifs.

**Démonstration :**

Si  $c$  divise  $a$  et  $b$  alors il existe deux entiers relatifs  $k$  et  $k'$  tels que  $a = kc$  et  $b = k'c$ .

Donc  $ma + nb = mkc + nk'c = (mk + nk')c$  et donc il existe un entier relatif  $l = mk + nk'$  tel que  $ma + nb = lc$ .

**Exemple :**

Soit un entier relatif  $N$  qui divise les entiers relatifs  $n$  et  $n + 1$ .

Alors  $N$  divise  $n + 1 - n = 1$ . Donc  $N = -1$  ou  $N = 1$ .

En effet,  $-1$  ou  $1$  divisent deux entiers consécutifs.

**Méthode :** Utiliser la propriété des combinaisons linéaires (démonstration avec réciproque)

 Vidéo <https://youtu.be/JGJ0VJV2Zgo>

Déterminer les entiers relatifs  $n$ , tels que  $2n + 5$  divise  $n - 1$ .

**Correction**

• On a :  $2n + 5 \mid 2n + 5$

Si  $2n + 5 \mid n - 1$  et  $2n + 5 \mid 2n + 5$ , alors d'après la propriété des combinaisons linéaires :

$2n + 5 \mid -2(n - 1) + 2n + 5$

Soit :  $2n + 5 \mid -2n + 2 + 2n + 5$

Soit encore :  $2n + 5 \mid 7$ .

Les diviseurs de 7 sont :  $-7$  ;  $-1$  ;  $1$  et  $7$ .

Donc :

$2n + 5 = -7$  soit  $n = -6$

$2n + 5 = -1$  soit  $n = -3$

$2n + 5 = 1$  soit  $n = -2$

$2n + 5 = 7$  soit  $n = 1$

Les solutions possibles appartiennent à l'ensemble  $\{-6 ; -3 ; -2 ; 1\}$ .

L'idée est de fabriquer une combinaison linéaire de  $n - 1$  et  $2n + 5$  qui ne dépende plus de  $n$ .

Attention, il faut maintenant vérifier la réciproque. En effet, la propriété des combinaisons linéaires (si... alors...) donne une condition nécessaire pour avoir la divisibilité sur les combinaisons linéaires.

On a donc prouvé que, si  $2n + 5$  divise  $n - 1$ , alors nécessairement  $n$  appartient à l'ensemble  $\{-6 ; -3 ; -2 ; 1\}$ . La question est maintenant de savoir s'il suffit de prendre une valeur dans cet ensemble pour que  $2n + 5$  divise  $n - 1$ .

Il faut donc prouver maintenant que si  $n$  appartient à l'ensemble  $\{-6 ; -3 ; -2 ; 1\}$  alors  $2n + 5$  divise  $n - 1$ .

- Si  $n = -6$  :

$2n + 5 = -7$  et  $n - 1 = -7$ . Or,  $-7 \mid -7$ , donc  $-6$  est bien solution.

- Si  $n = -3$  :

$2n + 5 = -1$  et  $n - 1 = -4$ . Or,  $-1 \mid -4$ , donc  $-3$  est bien solution.

- Si  $n = -2$  :

$2n + 5 = 1$  et  $n - 1 = -3$ . Or,  $1 \mid -3$ , donc  $-2$  est bien solution.

- Si  $n = 1$  :

$2n + 5 = 7$  et  $n - 1 = 0$ . Or,  $7 \mid 0$ , donc  $1$  est bien solution.

- Les solutions sont  $-6, -3, -2$  et  $1$ .

## Partie 2 : Division euclidienne

**Propriété :** Soit  $a$  un entier naturel et  $b$  entier naturel non nul.

Il existe un unique couple d'entiers  $(q ; r)$  tel que  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < b$ .

**Définitions :**

-  $q$  est appelé le **quotient** de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ ,

-  $r$  est appelé le **reste**.

**Exemple :** Dans la division euclidienne de 412 par 15, on a :  $412 = 15 \times 27 + 7$

**Démonstration :**

**Existence :**

**1<sup>er</sup> cas :**  $0 \leq a < b$  : Le couple  $(q ; r) = (0 ; a)$  convient.

**2<sup>e</sup> cas :**  $b \leq a$  : Soit  $E$  l'ensemble des multiples de  $b$  strictement supérieurs à  $a$ .

Alors  $E$  est non vide car l'entier  $2b \times a$  appartient à  $E$ .

En effet  $b \geq 1$  donc  $2b \times a \geq 2a > a$ .

$E$  possède donc un plus petit élément c'est à dire un multiple de  $b$  strictement supérieur à  $a$  tel que le multiple précédent soit inférieur ou égal à  $a$ .

Il existe donc un entier  $q$  tel que  $qb \leq a < (q + 1)b$ .

Comme,  $b \leq a$  on a :  $b \leq a < (q + 1)b$ .

Et comme  $b > 0$ , on a :  $0 < (q + 1)b$  et donc  $0 < q$ .

$q$  est donc un entier naturel.

On peut poser  $r = a - bq$ .

Or  $a, b$  et  $q$  sont des entiers, donc  $r$  est entier.  
 Comme  $qb \leq a$ , on a  $r \geq 0$  donc  $r$  est donc un entier naturel.  
 Et comme  $a < (q + 1)b$  on en déduit que  $r < b$ .

### **Unicité :**

On suppose qu'il existe deux couples  $(q ; r)$  et  $(q' ; r')$ .

$$\text{Donc } a = bq + r = bq' + r'.$$

$$\text{Et donc : } b(q - q') = r' - r.$$

Comme  $q - q'$  est entier,  $r' - r$  est un multiple de  $b$ .

On sait que  $0 \leq r < b$  et  $0 \leq r' < b$  donc  $-b < -r \leq 0$  et  $0 \leq r' < b$ ,  
 donc  $-b < r' - r < b$ .

Le seul multiple de  $b$  compris entre  $-b$  et  $b$  est 0, donc  $r' - r = 0$  et donc  $r' = r$ .

D'où  $q = q'$ .

**Propriété :** On peut étendre la propriété précédente au cas où  $a$  est un entier relatif.

- Admis -

**Méthode :** Déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne (1)

 Vidéo <https://youtu.be/bwS45UeOZrg>

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $-5\,000$  par  $17$ .

### **Correction**

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\begin{array}{r} 5000 \div 17 \\ 294.1176471 \\ 5000 - 17 \times 294 \\ \hline 2 \end{array}$$

Ainsi :  $5\,000 = 17 \times 294 + 2$

Donc :  $-5\,000 = 17 \times (-294) - 2$

Le reste est un entier positif inférieur à  $17$ .

Donc :  $-5\,000 = 17 \times (-294) - 17 - 2 + 17$

Soit :  $-5\,000 = 17 \times (-295) + 15$

D'où, le quotient est  $-295$  et le reste est  $15$ .

**Méthode :** Déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne (2)

 Vidéo <https://youtu.be/fv5uhr8JP3U>

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $5n + 11$  par  $2n + 3$ , avec  $n$  entier naturel.

### **Correction**

- Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $5n + 11 = 2(2n + 3) + n + 5$

On décompose  $5n + 11$  en  $Q(2n + 3) + R$ .

On a choisi  $Q = 2$  car 2 est le plus grand facteur entier tel que  $5n + 11 \geq Q(2n + 3)$ . En effet, le produit du **diviseur** par le **quotient** ne doit pas dépasser le dividende, sinon le **reste** serait négatif !

La relation  $5n + 11 = 2(2n + 3) + n + 5$  est la division euclidienne de  $5n + 11$  par  $2n + 3$  à condition que  $0 \leq n + 5 < 2n + 3$ , soit :  $n > 2$  ou encore  $n \geq 3$ .

Ainsi, pour  $n \geq 3$ , dans la division euclidienne de  $5n + 11$  par  $2n + 3$ , le quotient est 2 et le reste est  $n + 5$ .

- Reste donc à traiter les cas  $n = 0, n = 1$  et  $n = 2$

$n$	$5n + 11$	$2n + 3$	Quotient	Reste
0	11	3	3	2
1	16	5	3	1
2	21	7	3	0

**Propriété :** Soit un entier naturel  $b$ , tel que  $b \geq 2$ .

Alors, tout entier  $a$  s'écrit sous l'une des formes suivantes :

$bq$  ou  $bq + 1$  ou  $bq + 2 \dots$  ou  $bq + (b - 1)$ , avec  $q$  entier relatif.

Exemples pour comprendre :

- En effectuant la division euclidienne de  $a$  par 5, on a :  $a = 5q + r$ , avec  $0 \leq r < 5$ .

Ainsi,  $a$  peut s'écrire :  $5q$  ou  $5q + 1$  ou  $5q + 2$  ou  $5q + 3$  ou  $5q + 4$ .

- De même,  $a$  peut s'écrire :  $2q$  ou  $2q + 1$ .

On retrouve ici, la notion de parité d'un nombre : un nombre est soit pair, soit impair.

Méthode : Effectuer une démonstration par disjonction des cas

 Vidéo <https://youtu.be/AEkdYp0Dgso>

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n(n + 5)(n - 5)$  est divisible par 3.

### Correction

Le raisonnement par disjonction de cas consiste à décomposer la proposition que l'on veut démontrer en différents cas qui seront vérifiés successivement.

On veut démontrer ici une divisibilité par 3, il peut donc être pertinent de décomposer l'entier  $n$  sous une des trois formes suivantes :

$$n = 3q \text{ ou } n = 3q + 1 \text{ ou } n = 3q + 2, \text{ avec } q \text{ entier relatif.}$$

On a donc 3 cas possibles :

- Si  $n = 3q$  :

$$n(n + 5)(n - 5) = 3q(3q + 5)(3q - 5) \text{ donc } n(n + 5)(n - 5) \text{ est divisible par 3.}$$

- Si  $n = 3q + 1$  :

$$\begin{aligned} n(n + 5)(n - 5) &= (3q + 1)(3q + 1 + 5)(3q + 1 - 5) \\ &= (3q + 1)(3q + 6)(3q - 4) \end{aligned}$$

$$= 3(3q + 1)(q + 2)(3q - 4) \text{ donc } n(n + 5)(n - 5) \text{ est divisible par } 3.$$

- Si  $n = 3q + 2$  :
 
$$\begin{aligned} n(n + 5)(n - 5) &= (3q + 2)(3q + 2 + 5)(3q + 2 - 5) \\ &= (3q + 2)(3q + 7)(3q - 3) \\ &= 3(3q + 2)(3q + 7)(q - 1) \text{ donc } n(n + 5)(n - 5) \text{ est divisible par } 3. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ ,  $n(n + 5)(n - 5)$  est divisible par 3.

## Partie 3 : Congruences dans $\mathbb{Z}$

### 1) Définition

Exemple :

On considère la suite de nombres : 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.

Si on prend deux quelconques de ces nombres, alors leur différence est divisible par 5.

Par exemple :  $21 - 6 = 15$  qui est divisible par 5.

On dit que 21 et 6 sont congrus modulo 5.

**Définition :** Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Deux entiers  $a$  et  $b$  sont congrus modulo  $n$  lorsque  $a - b$  est divisible par  $n$ .

On note  $a \equiv b[n]$ .

**Propriété :** Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Deux entiers  $a$  et  $b$  sont congrus modulo  $n$ , si et seulement si, la division euclidienne de  $a$  par  $n$  a le même reste que la division euclidienne de  $b$  par  $n$ .

**Démonstration :**

- Si  $r = r'$  :

$$a - b = nq + r - nq' - r' = n(q - q') \text{ donc } a - b \text{ est divisible par } n \text{ et donc } a \equiv b[n].$$

- Si  $a$  et  $b$  sont congrus modulo  $n$  :

$$a - b = nq + r - nq' - r' = n(q - q') + r - r'$$

$$\text{Donc } r - r' = a - b - n(q - q')$$

Comme  $a \equiv b[n]$ ,  $a - b$  est divisible par  $n$  et donc  $r - r'$  est divisible par  $n$ .

Par ailleurs,  $0 \leq r < n$  et  $0 \leq r' < n$

$$\text{Donc } -n < -r \leq 0 \text{ et } 0 \leq r' < n$$

Et donc  $-n < r' - r \leq n$ .

$r - r'$  est un multiple de  $n$  compris entre  $-n$  et  $n$  donc  $r - r' = 0$ , soit  $r = r'$ .

Exemple : On a vu que  $21 \equiv 6[5]$ .

Les égalités euclidiennes  $21 = 4 \times 5 + 1$  et  $6 = 1 \times 5 + 1$  montrent que le reste de la division de 21 par 5 est égal au reste de la division de 6 par 5.

### Méthode : Écrire avec des congruences

▶ Vidéo <https://youtu.be/BTCsGN6xwXg>

▶ Vidéo <https://youtu.be/wdFNCnSflgE>

- a) Compléter :  $13 \equiv \dots [5]$        $45 \equiv \dots [3]$        $-8 \equiv \dots [12]$   
 b) Démontrer que :  $214 \equiv 25[9]$

### Correction

a) – Les solutions sont multiples, la plus simple consisterait à écrire  $13 \equiv 13[5]$  !  
 Ce n'est évidemment pas satisfaisant, on privilégiera la recherche d'un entier naturel  $r$  tel que  $13 \equiv r[5]$  avec  $0 \leq r < 5$  (en référence à la division euclidienne).  
 En effet, si  $r$  est le reste de la division de 13 par 5, alors on a :  $13 \equiv r[5]$ .

$13 \equiv r[5]$  signifie que  $13 = r + 5k$ , soit  $r = 13 - 5k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 On cherche donc un entier relatif  $k$ , tel que  $0 \leq 13 - 5k < 5$ .  
 En prenant  $k = 2$ , on a :  $r = 13 - 5k = 13 - 5 \times 2 = 3$ .  
 Ainsi :  $13 \equiv 3[5]$ .

– On cherche  $r$ , tel que  $45 \equiv r[3]$  et  $0 \leq r < 3$ .  
 $45 \equiv r[3]$  signifie que  $r = 45 - 3k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 Avec  $k = 15$ , on trouve  $r = 0$ .  
 Ainsi :  $45 \equiv 0[3]$ .

– On cherche  $r$ , tel que  $-8 \equiv r[12]$  et  $0 \leq r < 12$ .  
 $-8 \equiv r[12]$  signifie que  $r = -8 - 12k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 Avec  $k = -1$ , on trouve  $r = 4$ .  
 Ainsi :  $-8 \equiv 4[12]$ .

b)  $214 \equiv 25[9]$  signifie qu'il existe un entier relatif  $k$ , tel que  $214 - 25 = 9k$ .  
 C'est vrai !  
 En effet,  $k = 21$  convient :  $214 - 25 = 189 = 21 \times 9$ .

### 2) Propriétés sur les congruences

**Propriétés :** Soit  $n$  un entier naturel non nul.

a)  $a \equiv a[n]$  pour tout entier relatif  $a$ .

b) Si  $a \equiv b[n]$  et  $b \equiv c[n]$  alors  $a \equiv c[n]$  (Relation de transitivité)

**Démonstration :**

a)  $a - a = 0$  est divisible par  $n$ .

b)  $a \equiv b[n]$  et  $b \equiv c[n]$  donc  $n$  divise  $a - b$  et  $b - c$  donc  $n$  divise  $a - b + b - c = a - c$ .

**Propriété (Opérations) :** Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Soit  $a, b, a'$  et  $b'$  des nombres relatifs tels que  $a \equiv b[n]$  et  $a' \equiv b'[n]$  alors on a :

- $a + a' \equiv b + b'[n]$
- $a - a' \equiv b - b'[n]$
- $a \times a' \equiv b \times b'[n]$
- $a^p \equiv b^p[n]$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

On dit que l'addition, la soustraction et la multiplication sont compatibles avec les congruences.

Démonstration de la dernière relation :

- Initialisation : La démonstration est triviale pour  $p = 0$  ou  $p = 1$

- Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier  $k$  tel que la propriété soit vraie :  $a^k \equiv b^k[n]$

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang  $k + 1$  :  $a^{k+1} \equiv b^{k+1}[n]$ .

$$a^{k+1} \equiv a^k \times a \equiv b^k \times b \equiv b^{k+1}[n]$$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour  $p = 0$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $p$ .

Exemples :

On a :  $7 \equiv 4[3]$  et  $11 \equiv 20[3]$  donc :

-  $7 + 11 \equiv 4 + 20[3] \equiv 24[3] \equiv 0[3]$  et on a alors  $18 \equiv 0[3]$

-  $7 \times 11 \equiv 4 \times 20[3] \equiv 80[3] \equiv 2[3]$  et on a alors  $77 \equiv 2[3]$

Attention la réciproque est fautive :

Si  $k \times a \equiv k \times b[n]$ , on n'a pas nécessairement  $a \equiv b[n]$ .

En effet, la division n'est pas compatible avec les congruences.

Par exemple :

Si  $12 \equiv 18[6]$ , mais  $12:3 \not\equiv 18:3[6]$ .

Méthode : Appliquer les propriétés sur les congruences

 Vidéo <https://youtu.be/4RRjMC8 Dio>

Compléter le tableau :

$a$	$\equiv 1[4]$	$\equiv -1[7]$	$\equiv 1[10]$
$b$	$\equiv 2[4]$	$\equiv 4[7]$	$\equiv -5[10]$
$a + b$	$\equiv \dots[4]$	$\equiv \dots[7]$	$\equiv \dots[10]$
$a - b$	$\equiv \dots[4]$	$\equiv \dots[7]$	$\equiv \dots[10]$
$a^2$	$\equiv \dots[4]$	$\equiv \dots[7]$	$\equiv \dots[10]$
$4b$	$\equiv \dots[4]$	$\equiv \dots[7]$	$\equiv \dots[10]$
$a^2 + 4b - 6$	$\equiv \dots[4]$	$\equiv \dots[7]$	$\equiv \dots[10]$

**Correction**



$a$	$\equiv 1[4]$	$\equiv -1[7]$	$\equiv 1[10]$
$b$	$\equiv 2[4]$	$\equiv 4[7]$	$\equiv -5[10]$
$a + b$	$\equiv 1 + 2[4] \equiv 3[4]$	$\equiv 3[7]$	$\equiv 6[10]$
$a - b$	$\equiv 1 - 2[4] \equiv -1[4]$ $\equiv 3[4]$	$\equiv 2[7]$	$\equiv 6[10]$
$a^2$	$\equiv 1^2[4] \equiv 1[4]$	$\equiv 1[7]$	$\equiv 1[10]$
$4b$	$\equiv 4 \times 2[4] \equiv 8[4]$ $\equiv 0[4]$	$\equiv 2[7]$	$\equiv 0[10]$
$a^2 + 4b - 6$	$\equiv 1 + 0 - 6[4]$ $\equiv -5[4] \equiv 3[4]$	$\equiv 4[7]$	$\equiv 5[10]$

### 3) Exemples d'application

**Méthode :** Résoudre une équation avec des congruences

 Vidéo <https://youtu.be/Hb39SqG6nbg>

 Vidéo [https://youtu.be/aTn05hp\\_b7I](https://youtu.be/aTn05hp_b7I)

a) Déterminer les entiers  $x$  tels que  $6 + x \equiv 5[3]$

b) Déterminer les entiers  $x$  tels que  $3x \equiv 5[4]$

#### Correction

a)  $6 + x \equiv 5[3]$

$$6 + x - 6 \equiv 5 - 6[3]$$

$$x \equiv -1[3]$$

$$x \equiv 2[3]$$

Les entiers  $x$  solutions sont tous les entiers de la forme  $2 + 3k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

b)  $3x \equiv 5[4]$  donc  $3x \equiv 1[4]$

Or  $x$  est nécessairement congru à l'un des entiers 0, 1, 2 ou 3 modulo 4.

Par disjonction des cas, on a :

$x$ modulo 4	0	1	2	3
$3x$ modulo 4	0	3	2	1

Donc  $3 \times 3 \equiv 1[4]$ . On en déduit que  $x \equiv 3[4]$ .

Les entiers  $x$  solutions sont tous les entiers de la forme  $3 + 4k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Méthode :** Démontrer une divisibilité à l'aide des congruences

 Vidéo [https://youtu.be/ZzIPFO59\\_t0](https://youtu.be/ZzIPFO59_t0)

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n(n + 5)(n - 5)$  est divisible par 3.

On retrouve le même exercice (résolu ici à l'aide des congruences) que celui proposé dans la partie 2.

#### Correction

On veut démontrer ici une divisibilité par 3, il peut donc être pertinent d'écrire  $n$  à l'aide de modulo 3 :

$$n \equiv 0[3] \text{ ou } n \equiv 1[3] \text{ ou } n \equiv 2[3]$$

On a donc 3 cas possibles, on va effectuer la démonstration par disjonction des cas en présentant les calculs dans un tableau :

$n \equiv 0[3]$	$n \equiv 1[3]$	$n \equiv 2[3]$
$n + 5 \equiv 2[3]$	$n + 5 \equiv 0[3]$	$n + 5 \equiv 1[3]$
$n - 5 \equiv 1[3]$	$n - 5 \equiv 2[3]$	$n - 5 \equiv 0[3]$
$n(n + 5)(n - 5) \equiv 0[3]$	$n(n + 5)(n - 5) \equiv 0[3]$	$n(n + 5)(n - 5) \equiv 0[3]$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ ,  $n(n + 5)(n - 5)$  est divisible par 3.

**Méthode :** Déterminer le reste d'une division euclidienne à l'aide de congruences

 Vidéo <https://youtu.be/uVS-oeibDJ4>

- a) Déterminer le reste de la division de  $2^{456}$  par 5.  
 b) Déterminer le reste de la division de  $2^{437}$  par 7.

### Correction

a) Toute puissance de 2 est égale à 1. On cherche donc à faire apparaître une puissance de 2 qui est égale à 1 modulo 5.

On choisit alors de décomposer 456 à l'aide du facteur 4 car  $2^4 \equiv 16 \equiv 1[5]$ .

$$\begin{aligned} 2^{456} &\equiv 2^{4 \times 114}[5] \\ &\equiv (2^4)^{114}[5] \end{aligned}$$

On applique la formule de congruence des puissances :  $(2^4)^{114} \equiv 1^{114}[5]$

$$\begin{aligned} 2^{456} &\equiv 1^{114}[5] \\ &\equiv 1[5] \end{aligned}$$

Le reste est égal à 1.

b) On cherche donc une puissance de 2 qui est égale à 1 modulo 7.

On choisit alors de décomposer 437 à l'aide du facteur 3 car  $2^3 \equiv 8 \equiv 1[7]$ .

$$\begin{aligned} 2^{437} &\equiv 2^{3 \times 145 + 2}[7] \\ &\equiv (2^3)^{145} \times 2^2[7] \\ &\equiv 1^{145} \times 4[7] \\ &\equiv 4[7] \end{aligned}$$

Le reste est égal à 4.

**Étude d'un problème de chiffrement : Appliquer un codage (Cryptographie) :**

 Vidéo <https://youtu.be/GC7IFz4WGsc>



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)