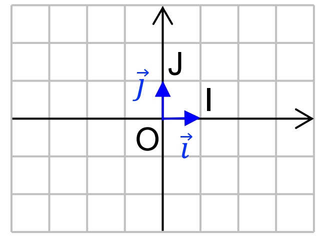
VECTEURS ET REPÉRAGE

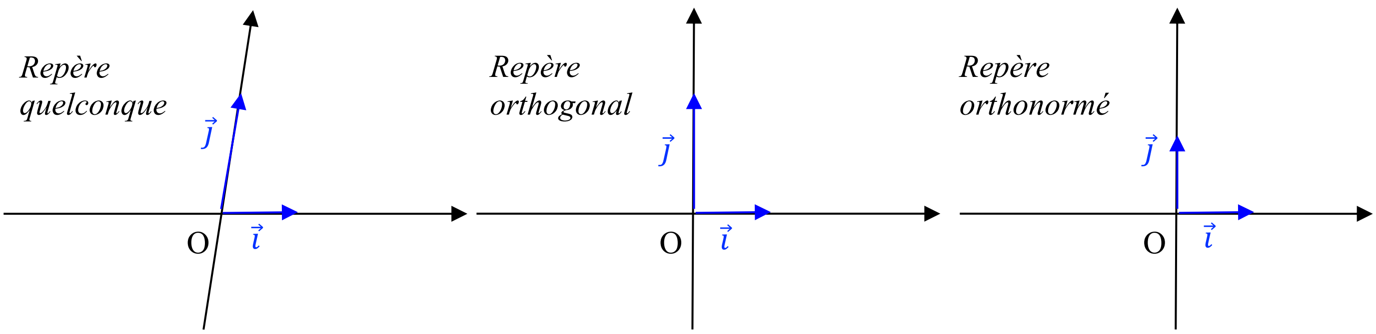
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/9OB3hct6gak

Partie 1 : Repère du plan

Trois points du plan non alignés O, I et J forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).
L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).
Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

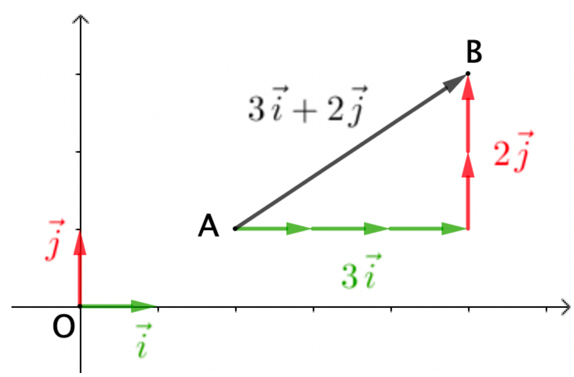


Définitions :
- On appelle **repère du plan** tout triplet (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
- Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- Un repère est dit **orthonormé** s'il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.



TP info : Lectures de coordonnées :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Lecture_coord.pdf

Partie 2 : Coordonnées d'un vecteur



Exemple :

Vidéo https://youtu.be/8PyiMHtp1fE

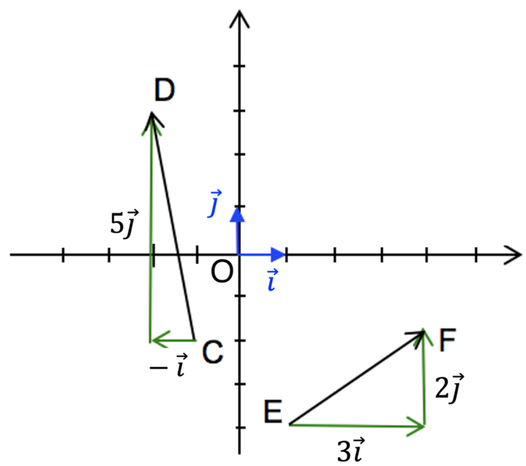
Pour aller de A vers B, on parcourt un chemin :
3 unités vers la droite et 2 unités vers le haut.
Ainsi $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ se notent $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou (3 ; 2). On préfèrera la première notation.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique

Vidéo https://youtu.be/8PyiMHtp1fE

a) Dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), placer les points $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.
b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique.

Correction



On a :
$\overrightarrow{CD} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{EF} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Propriété :
Soit deux points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul

Vidéo https://youtu.be/wnNzmod2tMM

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, tels que :
$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

Correction

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\3-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4-1\\-2-(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Propriétés :

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, et un réel k.

On a :

- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ • $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ • $-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Méthode : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/rC3xJNCuzkw

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}$.

Correction

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

$3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\times 3\\3\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$, $4\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\times(-1)\\4\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\20\end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9-(-4)\\6-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-14\end{pmatrix}$

Méthode : Calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

Vidéo https://youtu.be/eQsMZTcniuY

Soit les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Correction

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

On pose $\begin{pmatrix}x_D\\y_D\end{pmatrix}$ les coordonnées du point D.

On a alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-1\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x_D\\-2-y_D\end{pmatrix}$

Donc : $1-x_D=-5$ et $-2-y_D=1$

$-x_D=-5-1$ et $-y_D=1+2$

$x_D=6$ et $y_D=-3$.

Les coordonnées du point D sont donc $\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$.

Partie 3 : Colinéarité de deux vecteurs

1. Critère de colinéarité

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que : $xy' - yx' = 0$.

Remarque : Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' = yx'$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/VKMrzaiPtw4

- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.

Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.
Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $yx' = xy'$.
Soit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$.
Comme on a déjà $x = kx'$, on en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

Vidéo https://youtu.be/eX-_639Pfw8

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
a) $\vec{u}\binom{4}{-7}$ et $\vec{v}\binom{-12}{21}$ b) $\vec{u}\binom{5}{-2}$ et $\vec{v}\binom{15}{-7}$

Correction
a) $xy' - yx' = 4 \times 21 - (-7) \times (-12) = 84 - 84 = 0$.
Le critère de colinéarité est vérifié donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
On peut également observer directement que $\vec{v} = -3\vec{u}$.

b) $xy' - yx' = 5 \times (-7) - (-2) \times (15) = -35 + 30 = -5 \neq 0$.
Le critère de colinéarité n'est pas vérifié donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

2. Déterminant de deux vecteurs

Définition : Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note : $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété : Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant

Vidéo https://youtu.be/MeHOuwy81-8

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$

Correction
a) $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = (-6) \times (-15) - 10 \times 9 = 90 - 90 = 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b) $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = 4 \times 23 - 9 \times 11 = 92 - 99 = -7 \neq 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

3. Applications

Propriétés :
1) Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2) Dire que les points A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode : Appliquer la colinéarité

Vidéo https://youtu.be/hp8v6YAQQRI
Vidéo https://youtu.be/dZ81uKVDGpE

On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.
a) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
b) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

Correction
a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-(-2)\\-1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.
$det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})=\begin{vmatrix}4 & 8\\1 & 2\end{vmatrix}=4\times2-8\times1=8-8=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Remarque :
On aurait pu également remarquer que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles pour en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

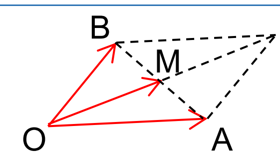
b) $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}3-5\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}6-5\\-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
$det(\overrightarrow{EB}\,;\,\overrightarrow{ED})=\begin{vmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{vmatrix}=-2\times(-1)-2\times1=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. Donc les points E, B et D sont alignés.

Partie 4 : Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété : Soit deux points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.

Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$

Démonstration :



Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B.
Soit M son centre.
Alors $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.
$\overrightarrow{OM}$ (ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ soit :
$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_A+x_B)\\\frac{1}{2}(y_A+y_B)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$.

Méthode : Calculer les coordonnées d'un milieu

Vidéo https://youtu.be/YTQCtSvxAmM

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

Correction

$$M\begin{pmatrix}\dfrac{2+(-2)}{2}\\\dfrac{3+1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \qquad N\begin{pmatrix}\dfrac{2+3}{2}\\\dfrac{3+(-1)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\1\end{pmatrix} \qquad P\begin{pmatrix}\dfrac{-2+3}{2}\\\dfrac{1+(-1)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\0\end{pmatrix}$$

Partie 5 : Distance dans un repère orthonormé

Propriété : Soit deux points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ dans un repère ***orthonormé*** :
La distance AB (ou la norme de $\overrightarrow{AB}$) est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Remarque : Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore.

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

Vidéo https://youtu.be/pP8ebg8W9o8

Soit deux points $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.
Calculer la distance AB.

Correction

La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{(2-3)^2+(-2-2)^2}\\&=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}\\&=\sqrt{1+16}\\&=\sqrt{17}\end{aligned}$$