# VECTEURS ET REPÉRAGE

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/9OB3hct6gak**](https://youtu.be/9OB3hct6gak)

**Partie 1 : Repère du plan**

Trois points du plan non alignés O, I et J forment un repère, que l’on peut noter (O, I, J).

$$\vec{i}$$

$$\vec{j}$$

I

J

O

L’origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

Si on pose $\vec{i}$ = $\vec{OI}$ et $\vec{j}$ = $\vec{OJ}$*,* alors ce repère se note également (O, $\vec{i}$ *,* $\vec{j}$).

Définitions :

- On appelle **repère du plan** tout triplet (O, $\vec{i}$*,* $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{i}$et$\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

- Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$et$\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.

- Un repère est dit **orthonormé** s’il est orthogonal et si $\vec{i}$et$\vec{j}$ sont de norme 1.

$$\vec{j}$$

O

$$\vec{i}$$

*Repère orthogonal*

$$\vec{j}$$

O

$$\vec{i}$$

*Repère orthonormé*

$$\vec{j}$$

O

$$\vec{i}$$

*Repère quelconque*

TP info : Lectures de coordonnées :

 [*http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Lecture\_coord.pdf*](http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Lecture_coord.pdf)



**Partie 2 : Coordonnées d’un vecteur**

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8PyiMHtp1fE**](https://youtu.be/8PyiMHtp1fE)

Pour aller de A vers B, on parcourt un chemin :

3 unités vers la droite et 2 unités vers le haut.

Ainsi $\vec{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$.

Les coordonnées de $\vec{AB}$ se notent $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$ ou $(3 ;2)$. On préfèrera la première notation.

Méthode : Déterminer les coordonnées d’un vecteur par lecture graphique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8PyiMHtp1fE**](https://youtu.be/8PyiMHtp1fE)

a) Dans le repère (O, $\vec{i}$*,* $\vec{j}$), placer les points $C\left(\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right), D\left(\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right), E\left(\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right), F\left(\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\right).$

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{CD} $et $\vec{EF}$ par lecture graphique.



**Correction**

On a :

$\vec{CD}=-\vec{i}+5\vec{j}$ donc $\vec{CD}$ a pour coordonnées $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right).$

$\vec{EF}=3\vec{i}+2\vec{j}$ donc $\vec{EF}$ a pour coordonnées $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$.

Propriété :

Soit deux points $A\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $B\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right)$.

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\left(\begin{matrix}x\_{B}-x\_{A}\\y\_{B}-y\_{A}\end{matrix}\right)$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d’un vecteur par calcul

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wnNzmod2tMM**](https://youtu.be/wnNzmod2tMM)

Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD} $et $\vec{EF}$, tels que :

$A\left(\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right)$, $B\left(\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right)$, $C\left(\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right)$, $D\left(\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right)$, $E\left(\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right)$ et $F\left(\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\right)$.

**Correction**

 $\vec{AB}\left(\begin{matrix}5-2\\3-1\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$

$\vec{CD}\left(\begin{matrix}-2-\left(-1\right)\\3-\left(-2\right)\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$

 $\vec{EF}\left(\begin{matrix}4-1\\-2-\left(-4\right)\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$

Propriétés :

Soit deux vecteurs $\vec{u}\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$, et un réel $k$.

On a :

*●* $\vec{u}+\vec{v}$ $\left(\begin{matrix}x+x'\\y+y'\end{matrix}\right)$ *●* $k\vec{u}$$\left(\begin{matrix}kx\\ky\end{matrix}\right) ●$$-\vec{u}\left(\begin{matrix}-x\\-y\end{matrix}\right)$

*●*$ \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux lorsque $x=x'$ et $y=y'$.

Méthode : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/rC3xJNCuzkw**](https://youtu.be/rC3xJNCuzkw)

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs $3\vec{AB}$, $4\vec{CD}$ et $3\vec{AB}-4\vec{CD}$.

**Correction**

On a : $\vec{AB}\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$ et $\vec{CD}\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$.

$3\vec{AB}\left(\begin{matrix}3×3\\3×2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}9\\6\end{matrix}\right)$, $4\vec{CD}\left(\begin{matrix}4×\left(-1\right)\\4×5\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-4\\20\end{matrix}\right)$

$$3\vec{AB}-4\vec{CD}\left(\begin{matrix}9-\left(-4\right)\\6-20\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}13\\-14\end{matrix}\right)$$

Méthode : Calculer les coordonnées d’un point défini par une égalité vectorielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eQsMZTcniuY**](https://youtu.be/eQsMZTcniuY)

Soit les points $A\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right)$, $B\left(\begin{matrix}-4\\3\end{matrix}\right)$, $C\left(\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right)$.

Déterminer les coordonnées du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

**Correction**

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB}=\vec{DC}$.

On pose $\left(\begin{matrix}x\_{D}\\y\_{D}\end{matrix}\right)$ les coordonnées du point $D$.

On a alors : $\vec{AB}\left(\begin{matrix}-4-1\\3-2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-5\\1\end{matrix}\right)$ et $\vec{DC}\left(\begin{matrix}1-x\_{D}\\-2-y\_{D}\end{matrix}\right)$

Donc : $1-x\_{D}=-5$ et $-2-y\_{D}=1$

$ -x\_{D}=-5-1$ et $-y\_{D}=1+2$

 $x\_{D}=6$ et $ y\_{D}=-3$.

Les coordonnées du point $D$ sont donc $\left(\begin{matrix}6\\-3\end{matrix}\right).$

**Partie 3 : Colinéarité de deux vecteurs**

1. Critère de colinéarité

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}$ $\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}$ $\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$.

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que : $xy’-yx’=0$.

Remarque : Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy’=yx’$.

**Démonstration au programme :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/VKMrzaiPtw4**](https://youtu.be/VKMrzaiPtw4)

* Si l’un des vecteurs est nul alors l’équivalence est évidente.
* Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$ sont colinéaires équivaut à dire qu’il existe un nombre réel $k$ tel que  $\vec{u}$$=k\vec{v}$*.*

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$et$\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

Donc : $xy’=yx’$ soit encore $xy’-yx’=0$.

**Réciproquement**, si $xy’-yx’=0$.

Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l’une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que

$x’\ne 0$. Posons alors $k=$ $\frac{x}{x^{'}}$. L’égalité $xy’-yx’=0$ s’écrit : $yx’=xy’$*.*

Soit : $y$ $=\frac{xy^{'}}{x^{'}}$ $=$ $ky'$.

Comme on a déjà $x$ $=$ $kx'$, on en déduit que $\vec{u}$$=k\vec{v}$*.*

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eX-\_639Pfw8**](https://youtu.be/eX-_639Pfw8)

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}\left(\begin{matrix}4\\-7\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}-12\\21\end{matrix}\right)$ b) $\vec{u}\left(\begin{matrix}5\\-2\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}15\\-7\end{matrix}\right)$

**Correction**

a) $xy’-yx’=4×21-\left(-7\right)×\left(-12\right)=84-84=0$.

Le critère de colinéarité est vérifié donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

On peut également observer directement que $\vec{v}=-3\vec{u}$.

b) $xy’-yx’=5×\left(-7\right)-\left(-2\right)×\left(15\right)=-35+30=-5\ne 0$.

Le critère de colinéarité n’est pas vérifié donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

1. Déterminant de deux vecteurs

Définition : Soit deux vecteurs $\vec{u}$ $\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}$ $\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$.

Le nombre $xy’-yx’$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $det\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=\left|\begin{matrix}x&x'\\y&y'\end{matrix}\right|=xy^{'}-yx'$.

Propriété : Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l’aide du déterminant

 **Vidéo** [**https://youtu.be/MeHOuwy81-8**](https://youtu.be/MeHOuwy81-8)

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\left(\begin{matrix}-6\\10\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}9\\-15\end{matrix}\right)$ b) $\vec{u}\left(\begin{matrix}4\\9\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}11\\23\end{matrix}\right)$

**Correction**

a) $det\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=\left|\begin{matrix}-6&9\\10&-15\end{matrix}\right|=\left(-6\right)×\left(-15\right)-10×9=90-90=0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b) $det\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=\left|\begin{matrix}4&11\\9&23\end{matrix}\right|=4×23-9×11=92-99=-7\ne 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

1. Applications

Propriétés :

1) Dire que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

2) Dire que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés revient à dire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Méthode : Appliquer la colinéarité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/hp8v6YAQQRI**](https://youtu.be/hp8v6YAQQRI)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/dZ81uKVDGpE**](https://youtu.be/dZ81uKVDGpE)

On considère les points $A\left(\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right)$, $B\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$, $C\left(\begin{matrix}-2\\-3\end{matrix}\right)$, $D\left(\begin{matrix}6\\-1\end{matrix}\right)$ et $E\left(\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right)$.

a) Démontrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

b) Démontrer que les points $E$, $B$ et $D$ sont alignés.

**Correction**

a) $\vec{AB}\left(\begin{matrix}3-\left(-1\right)\\2-1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right)$ et $\vec{CD}$ $\left(\begin{matrix}6-\left(-2\right)\\-1-\left(-3\right)\end{matrix}\right)$ $=$ $\left(\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right)$.

$$det\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right)=\left|\begin{matrix}4&8\\1&2\end{matrix}\right|=4×2-8×1=8-8=0$$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires. Donc les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

Remarque :

On aurait pu également remarquer que les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont proportionnelles pour en déduire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

b) $\vec{EB}\left(\begin{matrix}3-5\\2-0\end{matrix}\right)$ $=$ $\left(\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right)$ et $\vec{ED}$ $\left(\begin{matrix}6-5\\-1-0\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right)$.

 $det\left(\vec{EB} ; \vec{ED}\right)=\left|\begin{matrix}-2&1\\2&-1\end{matrix}\right|=-2×\left(-1\right)-2×1=0$

Les vecteurs $\vec{EB}$ et $\vec{ED}$ sont colinéaires. Donc les points $E$, $B$ et $D$ sont alignés.

**Partie 4 : Coordonnées du milieu d’un segment**

Propriété : Soit deux points $A\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $B\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right)$.

Le milieu $M $du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\begin{matrix}\frac{x\_{A}+x\_{B}}{2}\\\frac{y\_{A}+y\_{B}}{2}\end{matrix}\right)$

B

O

M

A

Démonstration :

Considérons le parallélogramme construit à partir de $O$, $A$ et $B$.

Soit $M$ son centre.

Alors $\vec{OM}$ = $\frac{1}{2} $($\vec{OA}$ + $\vec{OB}$).

$\vec{OM}$ (ou $M$) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}$ ($\vec{OA}$ + $\vec{OB}$) soit : $\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}\left(x\_{A}+x\_{B}\right)\\\frac{1}{2}\left(y\_{A}+y\_{B}\right)\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{x\_{A}+x\_{B}}{2}\\\frac{y\_{A}+y\_{B}}{2}\end{matrix}\right)$.

Méthode : Calculer les coordonnées d’un milieu

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YTQCtSvxAmM**](https://youtu.be/YTQCtSvxAmM)

On considère les points $A\left(\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right)$, $B\left(\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right)$ et $C\left(\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right)$.

Calculer les coordonnées de $M$, $N $et $P $milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

**Correction**

$$M\left(\begin{matrix}\frac{2+\left(-2\right)}{2} \\\frac{3+1}{2}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right) N\left(\begin{matrix}\frac{2+3}{2}\\\frac{3+\left(-1\right)}{2}\end{matrix} \right)=\left(\begin{matrix}2,5\\1\end{matrix}\right) P\left(\begin{matrix}\frac{-2+3}{2}\\\frac{1+\left(-1\right)}{2}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0,5\\0\end{matrix}\right)$$

**Partie 5 : Distance dans un repère orthonormé**

Propriété : Soit deux points $A\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $B\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right)$ dans un repère ***orthonormé*** :

La distance $AB$ (ou la norme de $\vec{AB}$) est : $AB=$ $\sqrt{\left(x\_{B}-x\_{A}\right)^{2}+\left(y\_{B}-y\_{A}\right)^{2}}$

Remarque : Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore.

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pP8ebg8W9o8**](https://youtu.be/pP8ebg8W9o8)

Soit deux points $A\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)$ et $B\left(\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right)$ dans un repère orthonormé.

Calculer la distance $AB$.

**Correction**

La distance $AB$ (ou norme du vecteur $\vec{AB}$) est égale à :

$AB=$ $\sqrt{\left(2-3\right)^{2}+\left(-2-2\right)^{2}}$

$ =$ $\sqrt{\left(-1\right)^{2}+\left(-4\right)^{2}}$

 $ =\sqrt{1+16}$

 $=\sqrt{17}$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)