LES VECTEURS (Partie 1)

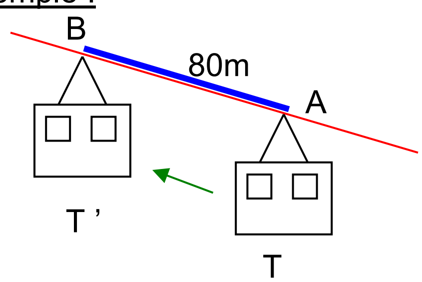
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/aSSDBNn_rRI

Activités de groupe : La Translation (Partie1) :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/trans_gr1.pdf

La Translation (Partie2) :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/trans_gr2.pdf

I. Translation

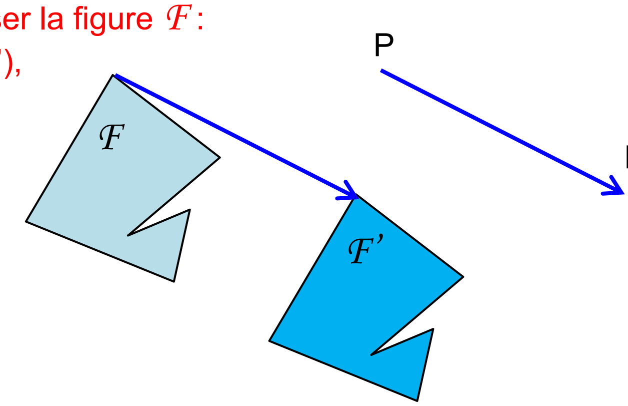
Exemple :



Une translation est un glissement :
- avec une direction donnée :
  câble du téléphérique, la droite (AB),
- avec un sens donné :
  le téléphérique monte de A vers B,
- avec une longueur donnée :
  80m, longueur AB

On dit que : Le téléphérique T' est l'image du téléphérique T par la translation qui transforme A en B.

Définition :
Soit P et P' deux points distincts du plan.
On appelle **translation** qui envoie P sur P' la transformation dont l'image $\mathcal{F}'$ d'une figure $\mathcal{F}$ est obtenue en faisant glisser la figure $\mathcal{F}$:
- selon la direction de la droite (PP'),
- dans le sens de P vers P',
- d'une longueur égale à PP'.

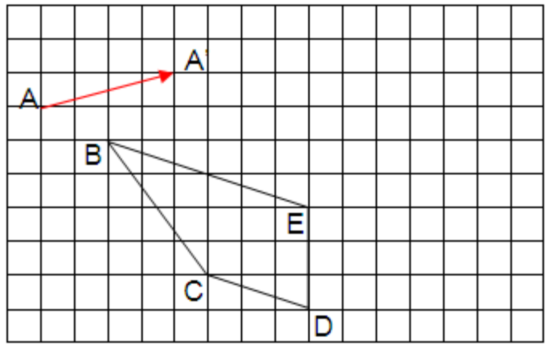


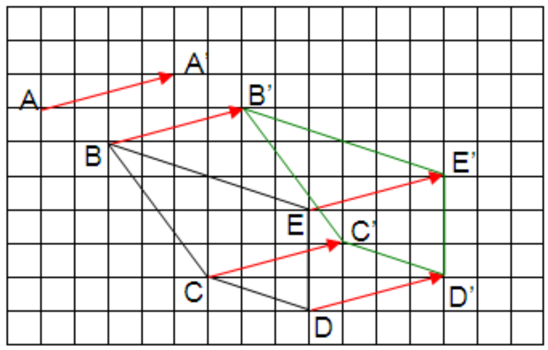
Méthode : Construire l'image d'une figure par une translation

Vidéo https://youtu.be/8Jb9cMOeYSk

Soit ***t*** la translation qui transforme A en A'.

Construire l'image B'C'D'E' du trapèze BCDE par la translation ***t***.



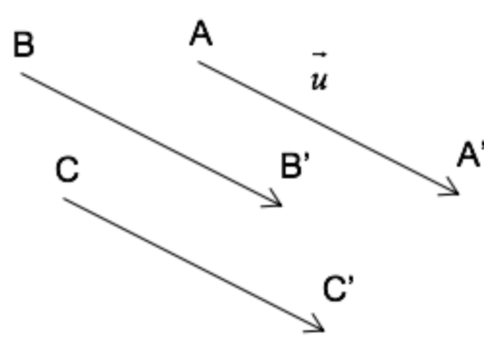


II. Vecteurs

1. Définition :

Définition :
Soit t la translation qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
Les couples de points (A ; A'), (B ; B') et (C ; C') définissent un **vecteur** caractérisé par :
- une direction : celle de la droite (AA'),
- un sens : de A vers A',
- une longueur : la longueur AA'.

On note $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.
On dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un **représentant** de $\vec{u}$.
$\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont également des représentants de $\vec{u}$.



Remarque : La longueur d'un vecteur est aussi appelée la **norme** du vecteur.

« vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)
Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\overrightarrow{AB}$ en 1920.
A l'origine des vecteurs, un italien, ***Giusto Bellavitis*** (1803-1880) qui les désignait comme *segments équipollents*.

Activités de groupe :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Act_vect.pdf

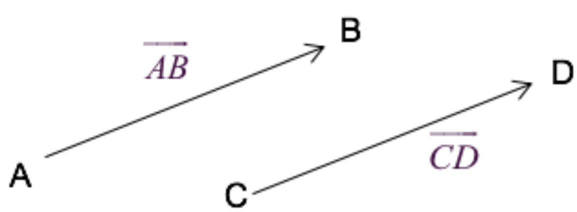
TP info : Bonhommes et dromadaires :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/bonhom.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/droma.pdf

2. Égalité de vecteurs

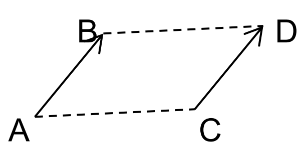
Définition :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.

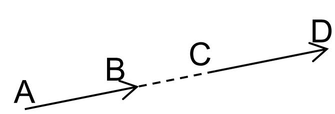
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exemple :
Ci-dessous, on peut poser : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.



Propriété du parallélogramme :
Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.





Démonstration :

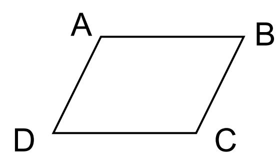
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point C en D. Les segments [AB] et [CD] ont donc même longueur et même direction.
  Le quadrilatère non croisé ABDC est donc un parallélogramme éventuellement aplati.
- Réciproquement : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, définis à l'aide des segments [AB] et [CD] d'un parallélogramme ABDC, sont égaux.

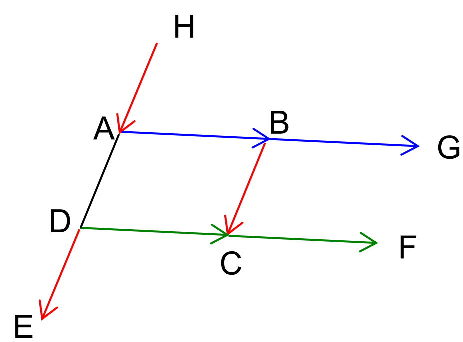
Méthode : Construire un point défini à partir de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/zcQPz4dfnn0

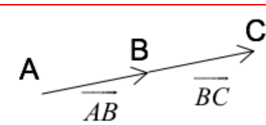
A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$





Propriété du milieu :
Dire que B est le milieu du segment [AC] revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.



Exercice : Utiliser des propriétés sur les vecteurs :
Vidéo https://youtu.be/XokpP_8mTOE

3. Vecteur nul

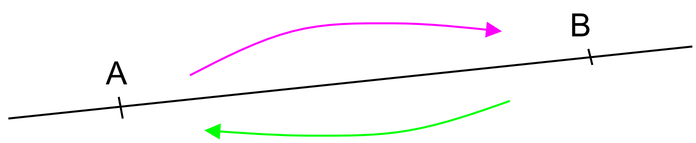
Définition :
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

On note : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Remarque : Pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

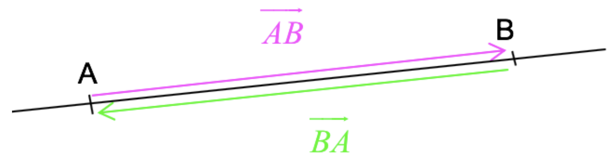
4. Vecteurs opposés

Il ne faut pas confondre sens et direction !
Une droite définit une direction, ci-dessous la direction de la droite (AB).
Cependant une direction possède deux sens, ici de « A vers B » ou de « B vers A ».



Définition :
Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur et qu'ils sont de sens contraire.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.
On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



III. Somme de vecteurs

1. Définition

Exemple :

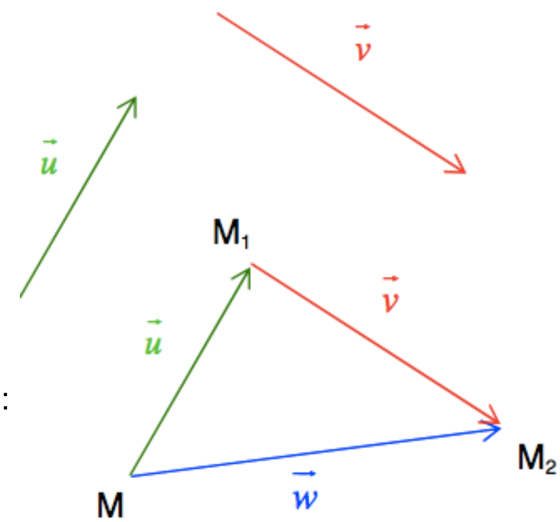
Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$
et t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2 :

$M \overset{t_1}{\longmapsto} M_1 \overset{t_2}{\longmapsto} M_2$

revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$:

$M \xmapsto{\quad t \quad} M_2$

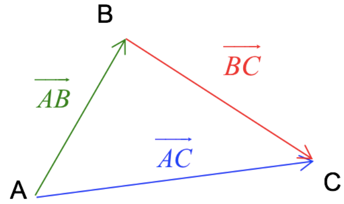


Propriété :
La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Une relation fondamentale

La relation de Chasles :
Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Remarque :
Dans le triangle ABC, on a également les relations : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Michel Chasles (Fr, 1793-1880) : La relation n'est pas de lui, mais nommée ainsi en hommage à ses travaux sur les vecteurs.
Homme naïf, on raconte qu'il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d'arc à sa mère, Vercingétorix à César,…) !

Méthode : Appliquer la relation de Chasles (non exigible)

Vidéo https://youtu.be/fbVrdYiY0qc

Simplifier les écritures :

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$
d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$ e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$ f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$
$= \overrightarrow{AN}$

b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$
$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$
$= \overrightarrow{AP}$

c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{NP}$

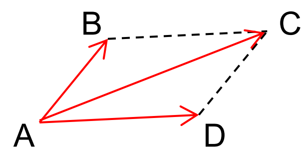
d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$
$= \overrightarrow{MM}$
$= \vec{0}$

e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$
$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$
$= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}$
$= \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KK} = \vec{0}$

3. Conséquence :

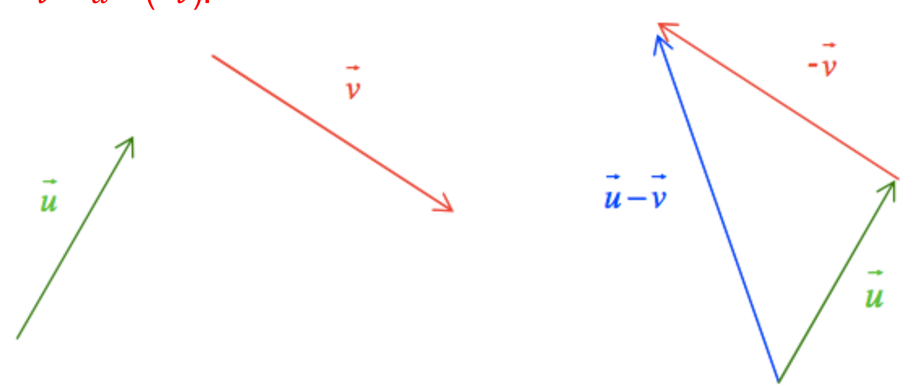
Propriété caractéristique du parallélogramme :
Dire que ABCD est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,



Démonstration :
D'après la relation de Chasles, l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ peut s'écrire :
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
Soit $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$,
soit encore : ABCD est un parallélogramme.

4. Différence de deux vecteurs

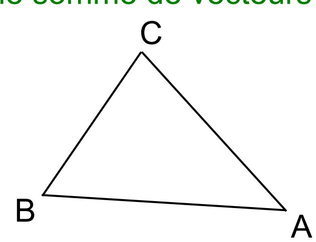
Définition :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **différence** du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$, tel que : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

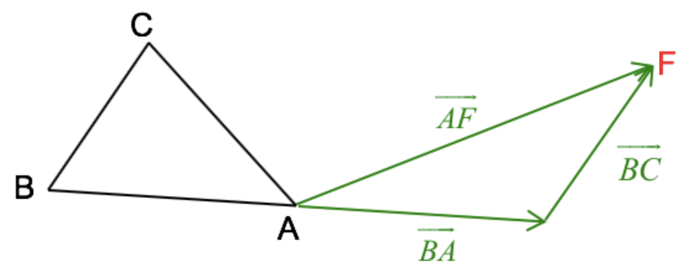


Méthode : Construire un point défini à partir d'une somme de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/nzABUzFM6p8

Soit un triangle ABC.
Construire le point *F* tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$





On construit à partir de *A* (origine de $\overrightarrow{AF}$) le vecteur $\overrightarrow{BA}$ + $\overrightarrow{BC}$ en mettant « bout à bout » les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On a ainsi construit un vecteur $\overrightarrow{AF}$ et donc le point *F*.