VARIABLES ALÉATOIRES



En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités.
Ils s’intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme celui du *Chevalier de Méré* :

*« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »*

**Partie 1 : Variable aléatoire et loi de probabilité**

 1) Variable aléatoire

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »

L'ensemble de toutes les issues possibles E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle l'univers des possibles.

On considère le jeu suivant :

* Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
* Sinon, on perd 1 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire $X$ sur E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou –1.

Pour les issues 5 et 6, on a : $X$ = 2

Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : $X$ = –1.

Définition : Une **variable aléatoire** $X$ associe un nombre réel à chaque issue de l’univers des possibles.

Méthode : Calculer une probabilité à l’aide d’une variable aléatoire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/IBqkrg8pxQ4**](https://youtu.be/IBqkrg8pxQ4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OnD\_Ym95Px4**](https://youtu.be/OnD_Ym95Px4)

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.

- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.

- Dans les autres cas, on perd 1 €.

Soit $X$ la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.

Calculer : $P(X=5)$, $P(X=-1)$ et $P(X\leq 2)$.

**Correction**

● $P(X=5)$ est la probabilité de gagner 5 €. On gagne 5 € lorsqu’on tire un cœur. Soit :

$$P\left(X=5\right)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

● $P(X=-1)$ est la probabilité de perdre 1 €. On perd 1 € lorsqu’on ne tire ni un cœur, ni un carreau. Soit :

$$P\left(X=-1\right)=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

● $P(X\leq 2)$ est la probabilité de gagner 2 € ou moins. Soit :

$$P\left(X\leq 2\right)=P\left(X=2\right)+P\left(X=-1\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

2) Loi de probabilité

Définition : Soit une variable aléatoire $X$ prenant les valeurs $x\_{1}, x\_{2}, ... , x\_{n}$.

La **loi de probabilité** de $X$ est donnée par toutes les probabilités $P(X=x\_{i})$.

Remarque : Les « $x\_{i}$ » sont toutes les valeurs prises par $X$.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité d’une variable aléatoire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/awtn6gsRwfs**](https://youtu.be/awtn6gsRwfs)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2Ge\_4hclPnI**](https://youtu.be/2Ge_4hclPnI)

****

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.

Soit $X$ la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.

Établir la loi de probabilité de $X$.

**Correction**

La variable aléatoire $X$ peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Par exemple, si on obtient la combinaison (2 ; 5), la plus grande valeur est 5 et on a : $X=5.$

● La plus grande des deux valeurs est 1, si on obtient la combinaison : (1 ; 1).

$$P\left(X=1\right)=\frac{1}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 2, si on obtient les combinaisons : (1 ; 2), (2 ; 1) ou (2 ; 2).

$$P\left(X=2\right)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

● La plus grande des deux valeurs est 3, si on obtient les combinaisons : (1 ; 3), (3 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2) ou (3 ; 3).

$$P\left(X=3\right)=\frac{5}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 4, si on obtient les combinaisons : (1 ; 4), (4 ; 1) (2 ; 4),

(4 ; 2), (3 ; 4), (4 ; 3) ou (4 ; 4).

$$P\left(X=4\right)=\frac{7}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : (1 ; 5), (5 ; 1) (2 ; 5),

(5 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4) ou (5 ; 5).

$$P\left(X=5\right)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

● La plus grande des deux valeurs est 6, si on obtient les combinaisons : (1 ; 6), (6 ; 1) (2 ; 6),

(6 ; 2), (3 ; 6), (6 ; 3), (4 ; 6), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5) ou (6 ; 6).

$$P\left(X=6\right)=\frac{11}{36}$$

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de $X$ :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $$P(X=x\_{i})$$ | $$ \frac{1}{36}$$ | $$ \frac{1}{12}$$ | $$ \frac{5}{36}$$ | $$ \frac{7}{36}$$ | $$ \frac{1}{4}$$ | $$ \frac{11}{36}$$ |

Remarque :

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{12}+\frac{5}{36}+\frac{7}{36}+\frac{1}{4}+\frac{11}{36}=1$$

**Partie 2 : Espérance**

Définitions : Soit une variable aléatoire $X$ prenant les valeurs $x\_{1}, x\_{2}, ... , x\_{n}$.

La loi de probabilité de $X$ associe à toute valeur $x\_{i}$ la probabilité $p\_{i}=P(X=x\_{i})$.

L'**espérance** de $X$ est : $E(X)=p\_{1} x\_{1}+p\_{2} x\_{2}+ … +p\_{n} x\_{n}$

Méthode : Calculer d'une variable aléatoire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/AcWVxHgtWp4**](https://youtu.be/AcWVxHgtWp4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/CbCMJXGhC4k**](https://youtu.be/CbCMJXGhC4k)

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.

- Si on tire un roi on gagne 5 €.

- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

$X$ est la variable aléatoire donnant le gain du jeu.

1) Calculer l'espérance de $X$.

2) Donner une interprétation du résultat.

**Correction**

1) On commence par établir la loi de probabilité de $X$ :

$X$ peut prendre les valeurs $-1$ €, 2 €, 5 € mais aussi 7 €.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 2 € (comme un cœur) + 5 € (comme un roi).

● Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X=2$.

$P(X=2)=$ $\frac{7}{32}$.

● Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X=5$.

$P(X=5)=$ $\frac{3}{32}$.

● Si la carte tirée est le roi de cœur, $X=7$.

$P(X=7)=$ $\frac{1}{32}$.

● Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X=-1$.

$P(X=-1)=$ $\frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de $X$ est :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | –1 | 2 | 5 | 7 |
| $$P(X=x\_{i})$$ | $$\frac{21}{32}$$ | $$\frac{7}{32}$$ | $$\frac{3}{32}$$ | $$\frac{1}{32}$$ |

$E(X)=$ $\frac{21}{32}$ $×\left(-1\right)+$ $\frac{7}{32}$ $×2+$ $\frac{3}{32}$ $×5+\frac{1}{32}$ $×7=\frac{15}{32}$ $≈0,47$

2) Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on peut espérer gagner, en moyenne, environ 0,47 € par tirage.

Si l’organisateur du jeu veut espérer faire un bénéfice, il pourra demander par exemple aux joueurs une participation de 0,50 € par tirage. Il gagnera en moyenne environ 0,03 € par tirage.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)