VARIABLES ALÉATOIRES

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/krbtyBDeRqQ

En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités.
Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme celui du *Chevalier de Méré* :
« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »

Partie 1 : Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple :
Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »
L'ensemble de toutes les issues E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle l'univers des possibles.
On considère le jeu suivant :
- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
- Sinon, on perd 1 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou –1.

Pour les issues 5 et 6, on a : X = 2
Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : X = –1.

Définition : Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers des possibles.

Méthode : Calculer une probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

Vidéo https://youtu.be/IBqkrg8pxQ4
Vidéo https://youtu.be/OnD_Ym95Px4

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.
- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.
- Dans les autres cas, on perd 1 €.
Soit X la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.
Calculer : $P(X = 5)$, $P(X = -1)$ et $P(X \leq 2)$.

Correction

● $P(X = 5)$ est la probabilité de gagner 5 €. On gagne 5 € lorsqu'on tire un cœur. Soit :

$$P(X = 5) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

● $P(X = -1)$ est la probabilité de perdre 1 €. On perd 1 € lorsqu'on ne tire ni un cœur, ni un carreau. Soit :

$$P(X = -1) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

● $P(X \leq 2)$ est la probabilité de gagner 2 € ou moins. Soit :

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2) Loi de probabilité

Définition : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Remarque : Les « x_i » sont toutes les valeurs prises par X.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité d'une variable aléatoire

Vidéo https://youtu.be/awtn6gsRwfs
Vidéo https://youtu.be/2Ge_4hclPnI

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.
Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.
Établir la loi de probabilité de X.

Correction
La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Par exemple, si on obtient la combinaison (2 ; 5), la plus grande valeur est 5 et on a : $X = 5$.

● La plus grande des deux valeurs est 1, si on obtient la combinaison : (1 ; 1).

$$P(X = 1) = \frac{1}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 2, si on obtient les combinaisons : (1 ; 2), (2 ; 1) ou (2 ; 2).

$$P(X = 2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

● La plus grande des deux valeurs est 3, si on obtient les combinaisons : (1 ; 3), (3 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2) ou (3 ; 3).

$$P(X = 3) = \frac{5}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 4, si on obtient les combinaisons : (1 ; 4), (4 ; 1) (2 ; 4), (4 ; 2), (3 ; 4), (4 ; 3) ou (4 ; 4).

$$P(X=4)=\frac{7}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : (1 ; 5), (5 ; 1) (2 ; 5), (5 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4) ou (5 ; 5).

$$P(X=5)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

● La plus grande des deux valeurs est 6, si on obtient les combinaisons : (1 ; 6), (6 ; 1) (2 ; 6), (6 ; 2), (3 ; 6), (6 ; 3), (4 ; 6), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5) ou (6 ; 6).

$$P(X=6)=\frac{11}{36}$$

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

Remarque :
On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{12}+\frac{5}{36}+\frac{7}{36}+\frac{1}{4}+\frac{11}{36}=1$$

Partie 2 : Espérance, variance, écart-type

Définitions : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i=P(X=x_i)$.

- L'**espérance** de X est :

$$E(X)=p_1\,x_1+p_2\,x_2+\ \dots\ +p_n\,x_n$$

- La **variance** de X est :

$$V(X)=p_1\big(x_1-E(X)\big)^2+p_2\big(x_2-E(X)\big)^2+\ \dots\ +p_n\big(x_n-E(X)\big)^2$$

- L'**écart-type** de X est :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire

Vidéo https://youtu.be/AcWVxHgtWp4
Vidéo https://youtu.be/CbCMJXGhC4k
Vidéo https://youtu.be/elpgMDSU5t8

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

X est la variable aléatoire donnant le gain du jeu.
1) Calculer l'espérance de X.

2) Donner une interprétation du résultat.
3) Calculer la variance et l'écart-type de X.

Correction
1) On commence par établir la loi de probabilité de X :
X peut prendre les valeurs -1 €, 2 €, 5 € mais aussi 7 €.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 2 € (comme un cœur) + 5 € (comme un roi).

● Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$.
$P(X = 2) = \frac{7}{32}$.
● Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$.
$P(X = 5) = \frac{3}{32}$.
● Si la carte tirée est le roi de cœur, $X = 7$.
$P(X = 7) = \frac{1}{32}$.
● Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = -1$.
$P(X = -1) = \frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32} \approx 0{,}47$$

2) Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on peut espérer gagner, en moyenne, environ 0,47 € par tirage.
Si l'organisateur du jeu veut espérer faire un bénéfice, il pourra demander par exemple aux joueurs une participation de 0,50 € par tirage. Il gagnera en moyenne environ 0,03 € par tirage.

3) Variance :
$$V(X) = \frac{21}{32} \times \left(-1 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{7}{32} \times \left(2 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{3}{32} \times \left(5 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{1}{32} \times \left(7 - \frac{15}{32}\right)^2 \approx 5{,}1865$$

Écart-type :
$\sigma(X) \approx \sqrt{5{,}1865} \approx 2{,}28$

Propriétés de linéarité (non exigible) :
Soit une variable aléatoire X. Soit a et b deux nombres réels. On a :
$E(aX + b) = aE(X) + b$ $\qquad$ $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Méthode : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition (non exigible)

Vidéo https://youtu.be/ljITvCBExVY

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Correction
Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.
La loi de probabilité de Y est alors :

x_i	−2	−1	0	1	2
$P(Y = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :
$E(Y) = -2 \times 0,2 + (-1) \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,1 = 0,1$
$$V(Y) = 0,2 \times (2 - 0,1)^2 + 0,1 \times (-1 - 0,1)^2 + 0,2 \times (0 - 0,1)^2 + 0,4 \times (1 - 0,1)^2 + 0,1 \times (2 - 0,1)^2$$
$$= 1,69$$

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :
$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000\,E(X) - 1300$
Donc : $E(X) = \dfrac{E(Y)+1300}{1000} = \dfrac{0,1+1300}{1000} = 1,3001$

$V(Y) = V(1000X - 1300) = 1000^2\,V(X)$
Donc : $V(X) = \dfrac{V(Y)}{1000^2} = \dfrac{1,69}{1000^2}$
Et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{1,69}{1000^2}} = \dfrac{1,3}{1000} = 0,0013$
Conclusion : $E(X) = 1,3001\ cm\ et\ \sigma(X) = 0,0013\ cm.$