VARIABLES ALÉATOIRES

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/krbtyBDeRqQ**](https://youtu.be/krbtyBDeRqQ)



En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités.
Ils s’intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme celui du *Chevalier de Méré* :

*« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »*

**Partie 1 : Variable aléatoire et loi de probabilité**

 1) Variable aléatoire

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »

L'ensemble de toutes les issues E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle l'univers des possibles.

On considère le jeu suivant :

* Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
* Sinon, on perd 1 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire sur E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou –1.

Pour les issues 5 et 6, on a : = 2

Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : = –1.

Définition : Une **variable aléatoire** associe un nombre réel à chaque issue de l’univers des possibles.

Méthode : Calculer une probabilité à l’aide d’une variable aléatoire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/IBqkrg8pxQ4**](https://youtu.be/IBqkrg8pxQ4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OnD\_Ym95Px4**](https://youtu.be/OnD_Ym95Px4)

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.

- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.

- Dans les autres cas, on perd 1 €.

Soit la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.

Calculer : , et .

**Correction**

● est la probabilité de gagner 5 €. On gagne 5 € lorsqu’on tire un cœur. Soit :

● est la probabilité de perdre 1 €. On perd 1 € lorsqu’on ne tire ni un cœur, ni un carreau. Soit :

● est la probabilité de gagner 2 € ou moins. Soit :

2) Loi de probabilité

Définition : Soit une variable aléatoire prenant les valeurs .

La **loi de probabilité** de est donnée par toutes les probabilités .

Remarque : Les «  » sont toutes les valeurs prises par .

Méthode : Déterminer une loi de probabilité d’une variable aléatoire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/awtn6gsRwfs**](https://youtu.be/awtn6gsRwfs)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2Ge\_4hclPnI**](https://youtu.be/2Ge_4hclPnI)

****

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.

Soit la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.

Établir la loi de probabilité de .

**Correction**

La variable aléatoire peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Par exemple, si on obtient la combinaison (2 ; 5), la plus grande valeur est 5 et on a :

● La plus grande des deux valeurs est 1, si on obtient la combinaison : (1 ; 1).

● La plus grande des deux valeurs est 2, si on obtient les combinaisons : (1 ; 2), (2 ; 1) ou (2 ; 2).

● La plus grande des deux valeurs est 3, si on obtient les combinaisons : (1 ; 3), (3 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2) ou (3 ; 3).

● La plus grande des deux valeurs est 4, si on obtient les combinaisons : (1 ; 4), (4 ; 1) (2 ; 4),

(4 ; 2), (3 ; 4), (4 ; 3) ou (4 ; 4).

● La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : (1 ; 5), (5 ; 1) (2 ; 5),

(5 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4) ou (5 ; 5).

● La plus grande des deux valeurs est 6, si on obtient les combinaisons : (1 ; 6), (6 ; 1) (2 ; 6),

(6 ; 2), (3 ; 6), (6 ; 3), (4 ; 6), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5) ou (6 ; 6).

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de  :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Remarque :

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 :

**Partie 2 : Espérance, variance, écart-type**

Définitions : Soit une variable aléatoire prenant les valeurs .

La loi de probabilité de associe à toute valeur la probabilité .

- L'**espérance** de est :

- La **variance** de est :

- L'**écart-type** de est :

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/AcWVxHgtWp4**](https://youtu.be/AcWVxHgtWp4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/CbCMJXGhC4k**](https://youtu.be/CbCMJXGhC4k)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/elpgMDSU5t8**](https://youtu.be/elpgMDSU5t8)

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.

- Si on tire un roi on gagne 5 €.

- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

 est la variable aléatoire donnant le gain du jeu.

1) Calculer l'espérance de .

2) Donner une interprétation du résultat.

3) Calculer la variance et l'écart-type de .

**Correction**

1) On commence par établir la loi de probabilité de  :

 peut prendre les valeurs €, 2 €, 5 € mais aussi 7 €.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 2 € (comme un cœur) + 5 € (comme un roi).

● Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), .

 .

● Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), .

 .

● Si la carte tirée est le roi de cœur, .

 .

● Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, .

 .

La loi de probabilité de est :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | –1 | 2 | 5 | 7 |
|  |  |  |  |  |

2) Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on peut espérer gagner, en moyenne, environ 0,47 € par tirage.

Si l’organisateur du jeu veut espérer faire un bénéfice, il pourra demander par exemple aux joueurs une participation de 0,50 € par tirage. Il gagnera en moyenne environ 0,03 € par tirage.

3) Variance :

Écart-type :

Propriétés de linéarité (non exigible) :

Soit une variable aléatoire . Soit et deux nombres réels. On a :

Méthode : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition (non exigible)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ljITvCBExVY**](https://youtu.be/ljITvCBExVY)

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.

L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.

La loi de probabilité de est résumée dans le tableau suivant :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,298 | 1,299 | 1,3 | 1,301 | 1,302 |
|  | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de .

**Correction**

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire

La loi de probabilité de est alors :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|  | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de :

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de :

Donc :

Donc :

Et donc :

Conclusion :

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)