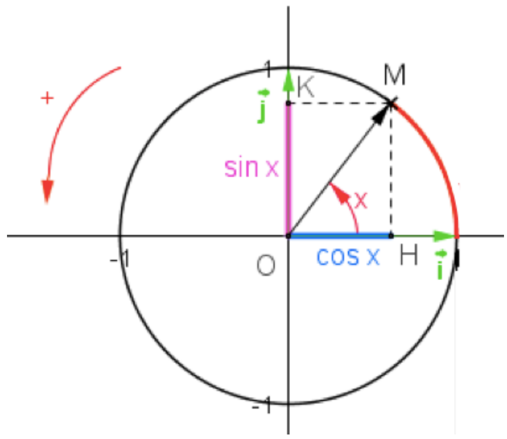
TRIGONOMÉTRIE
(Partie 2)

I. Sinus et cosinus d'un nombre réel

1) Définitions :



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.

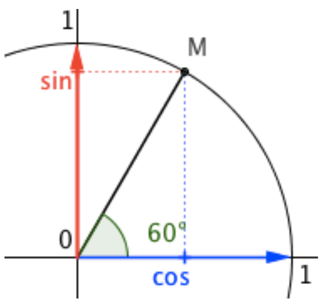
M est un point sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

Dans le triangle OHM rectangle en H, on a :
$\cos x = \dfrac{OH}{OM}$
Or $OM = 1$, donc $OH = \cos x$
$\cos x$ est donc l'abscisse de M.
On a également :
$\sin x = \dfrac{MH}{OM} = \dfrac{OK}{OM} = OK$

$\sin x$ est donc l'ordonnée de M.

Définitions :
Le **cosinus du nombre réel** x est l'abscisse de M et on note **cos** $\boldsymbol{x}$.
Le **sinus du nombre réel** x est l'ordonnée de M et on note **sin** $\boldsymbol{x}$.

Exemple :



On lit sur l'axe des abscisses : cos 60 = 0,5.

2) <u>Valeurs particulières :</u>

Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus à connaître :

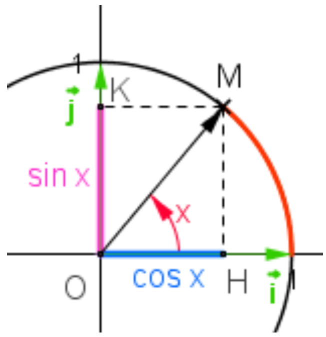
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3) <u>Propriétés :</u>

<u>Propriétés :</u>
1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$
2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
3) $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$
4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

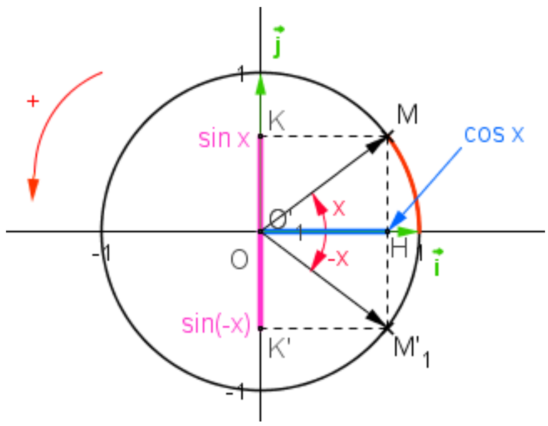
<u>Remarque :</u> $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2 x$.

<u>Démonstrations :</u>



1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2 x + \sin^2 x = OM^2 = 1$.



3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.

4) 5) Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Lire sur le cercle trigonométrique :

Vidéo https://youtu.be/ECNX9hnhG9U (en radians)

Vidéo https://youtu.be/m6tuif8ZpFY (en degrés)

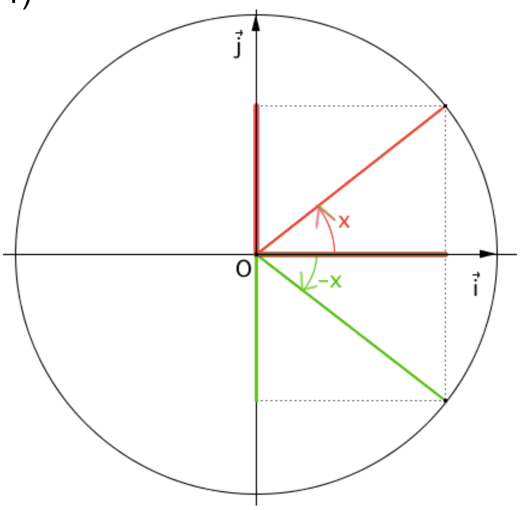
II. Cosinus et sinus d'angles associés

Définition : Deux angles sont dits **associés** s'ils admettent des cosinus et des sinus égaux ou opposés.

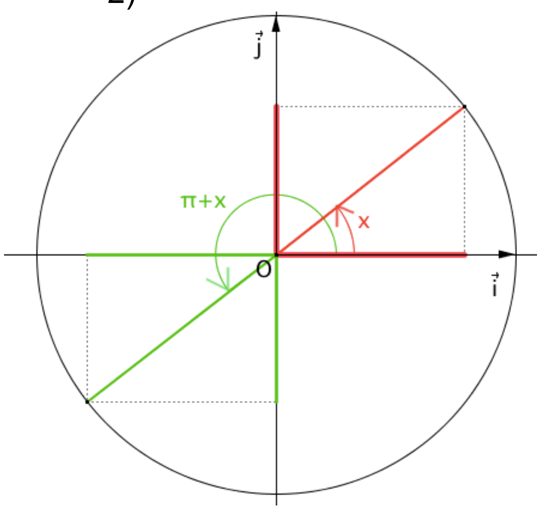
Propriétés :
Pour tout nombre réel x, on a :
1) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
2) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
3) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
5) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Démonstrations :
Par symétries, on démontre les résultats :

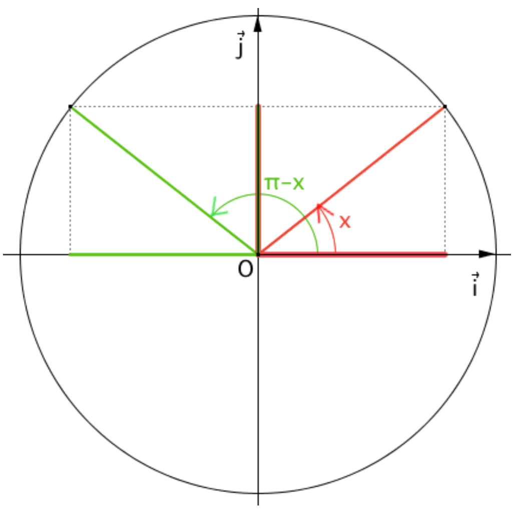
1)



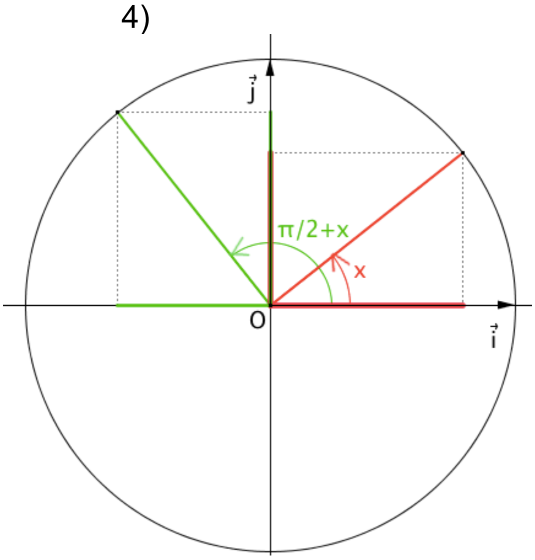
2)



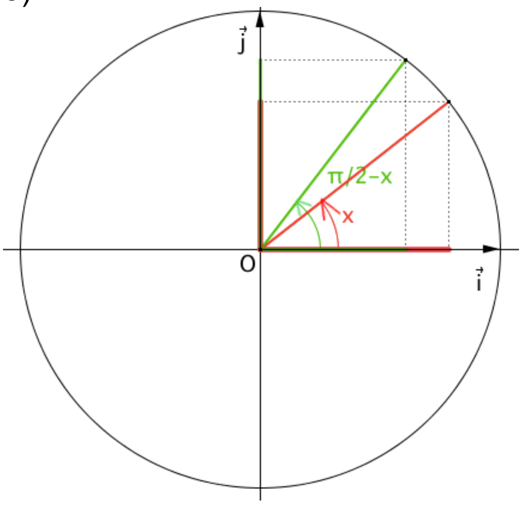
3)



4)



5)

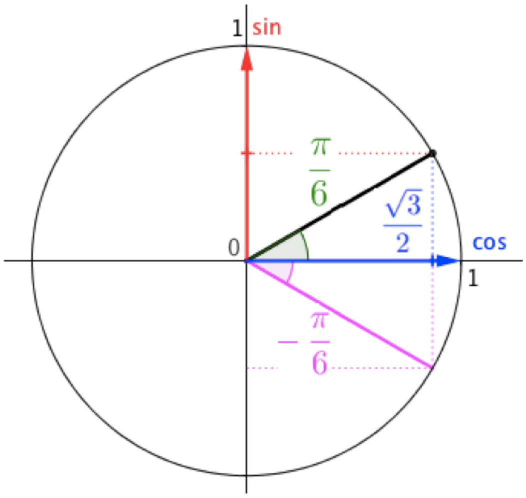


Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/NlV2zKJtvc8

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$



a) L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

où k est un entier relatif.

b) L'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

où k est un entier relatif.