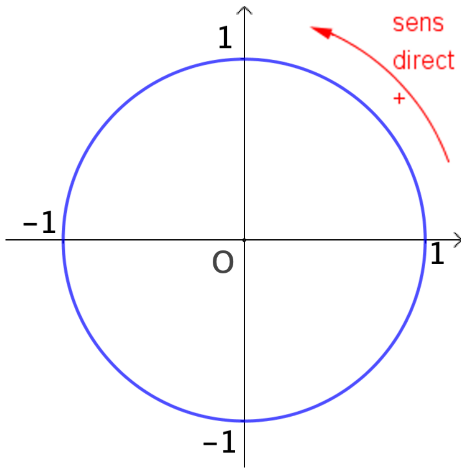
TRIGONOMÉTRIE – Chapitre 1/3

Partie 1 : Cercle trigonométrique et radian

1) Le cercle trigonométrique



Définition : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Le radian

Propriété :
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.

En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$.

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

3) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode : Passer des degrés aux radians et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/-fu9bSBKM00

1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ radians.

Correction

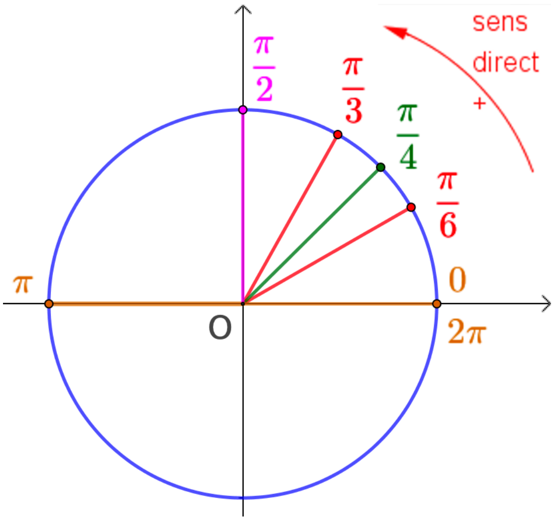
Radians	2π	?	$\frac{3\pi}{8}$
Degrés	360°	33°	?

1) $? = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11\pi}{60}$ 2) $? = \frac{3\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = 67{,}5°$

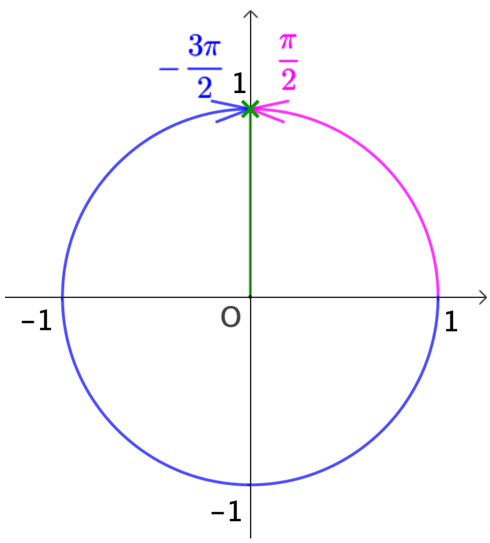
Partie 2 : Mesure d'un angle orienté

1) Lire sur le cercle trigonométrique

Exemple :
On a représenté ci-dessous des mesures remarquables sur le cercle trigonométrique.



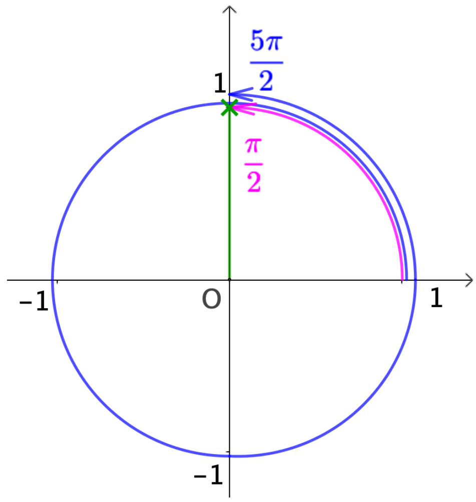
Par exemple, $\frac{\pi}{2}$ correspond à l'angle droit, soit 90°.
Mais il est possible de faire la lecture dans l'autre sens (le sens négatif ou indirect), ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}$.
Les mesures $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle.



Comme la lecture s'effectue sur un cercle, il est également possible de faire plusieurs fois le tour.

Cela qui donne par exemple $\frac{5\pi}{2}$ en effectuant un tour supplémentaire.

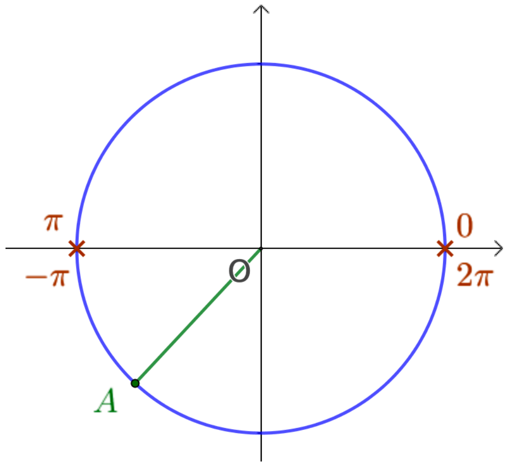
Les mesures $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle.



Méthode : Lire une valeur sur le cercle trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/NGZKQf9eLyg

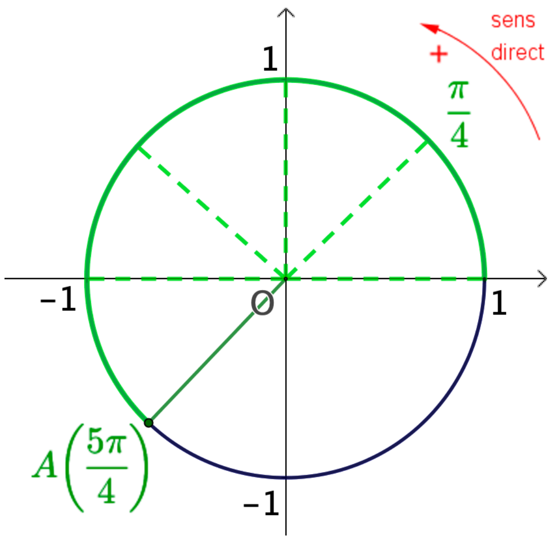
Lire sur le cercle trigonométrique le nombre associé au point A :
a) Sur l'intervalle $[0\,;\ 2\pi]$.
b) Sur l'intervalle $[-\pi\,;\ \pi]$.



Correction

a) Sur l'intervalle $[0\,;\ 2\pi]$, le nombre associé au point A est $\frac{5\pi}{4}$.

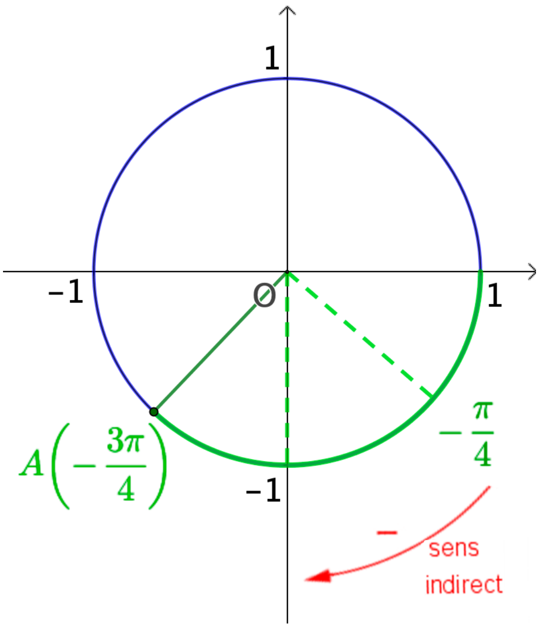
En effet, $\frac{5\pi}{4}$ appartient bien à l'intervalle $[0\,;\ 2\pi]$.



On compte « $5 \times \frac{\pi}{4}$ » dans le sens direct.

b) Sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$, le nombre associé au point A est $-\frac{3\pi}{4}$.
En effet, $-\frac{3\pi}{4}$ appartient bien à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

On compte « $3 \times -\frac{\pi}{4}$ » dans le sens indirect.



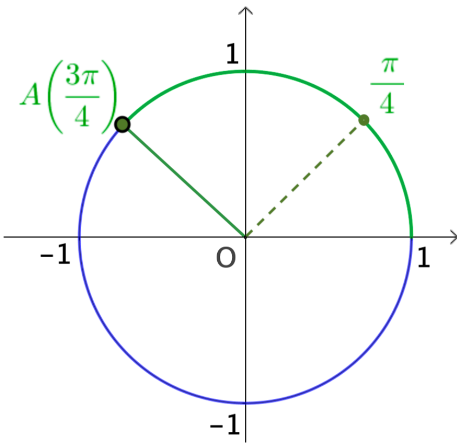
Méthode : Placer un point sur le cercle trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/7VAFJXLB9u0

Placer sur le cercle trigonométrique :
a) Le point A associé au nombre $\frac{3\pi}{4}$.
b) Le point B associé au nombre $\frac{9\pi}{4}$.
c) Le point C associé au nombre $\frac{8\pi}{3}$.
d) Le point D associé au nombre $-\frac{9\pi}{2}$.

Correction

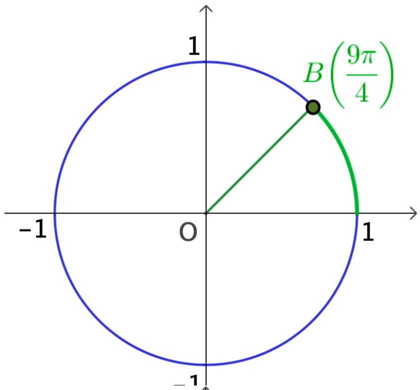
a)



b) $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$

$\frac{9\pi}{4}$ correspond à un tour complet dans le sens direct + $\frac{\pi}{4}$

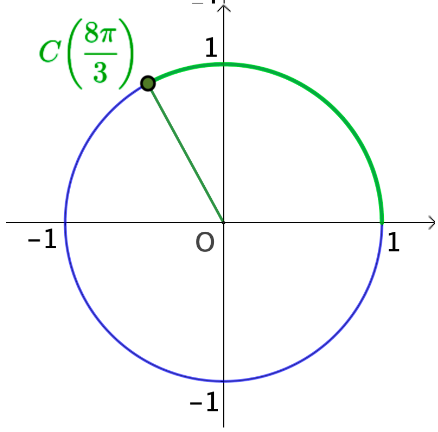
Le point B a la même position sur le cercle que le point associé à $\frac{\pi}{4}$.



c) $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$

$\frac{8\pi}{3}$ correspond à un tour complet dans le sens direct + $\frac{2\pi}{3}$

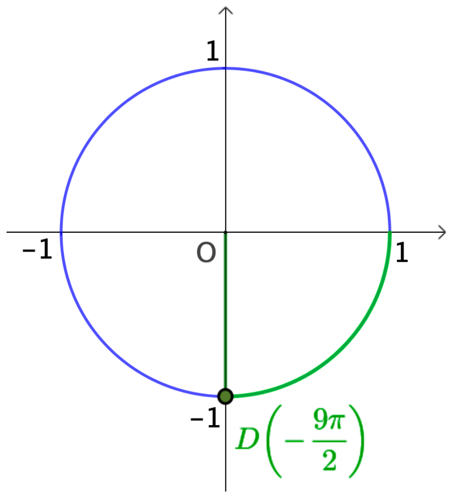
Le point C a la même position sur le cercle que le point associé à $\frac{2\pi}{3}$.



d) $-\frac{9\pi}{2} = -\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -4\pi - \frac{\pi}{2}$

$-\frac{9\pi}{2}$ correspond à deux tours complets dans le sens indirect $-\frac{\pi}{2}$.

Le point D a la même position sur le cercle que le point associé à $-\frac{\pi}{2}$.



2) Mesure principale d'un angle orienté

On a vu qu'un point sur le cercle trigonométrique peut être associé à plusieurs valeurs.

Définition : La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exemple :

Une mesure d'un angle est $\frac{7\pi}{4}$.

D'autres mesures sont : $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 4\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 6\pi$; ... soit : $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{17\pi}{4}$; ...

$-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle car c'est la seule comprise dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Méthode : Donner la mesure principale d'un angle

Vidéo https://youtu.be/BODMdi2S3rY

Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

Correction

- On choisit un multiple de 4 proche de 27, soit 28 :

$$\begin{aligned}\frac{27\pi}{4} &= \frac{28\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\\ &= 7\pi - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

- Dans 7π, on fait apparaître un multiple de 2π, soit 6π :

$$\begin{aligned}\frac{27\pi}{4} &= 6\pi + \pi - \frac{\pi}{4}\\ &= 6\pi + \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\\ &= 6\pi + \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

6π correspond à 3 tours entiers.

$\frac{3\pi}{4}$ est bien compris dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

La mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$.