

# PRIMITIVES

## I. Primitive d'une fonction

### 1) Définition

#### Exemple :

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + 3 \quad \quad \quad x \mapsto x^2 + 3x - 1$$

On constate que  $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$ .

On dit dans ce cas que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition :**  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On appelle **primitive** de  $f$  sur  $I$ , une fonction  $F$  telle que  $F' = f$ .

#### Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

" $F$  a pour dérivée  $f$ " et " $f$  a pour primitive  $F$ ".

**Méthode :** Démontrer qu'une fonction est une primitive d'une autre

 **Vidéo** <https://youtu.be/Tlo24OoLKio>

Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + 1$ .

Vérifier que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$  est une primitive de  $f$ .

On dérive la fonction  $F$  :

$$F'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x + 1 + 0.$$

$$= x + 1 = f(x)$$

Donc :  $F' = f$

Et donc  $F$  est une primitive de  $f$ .

### 2) Propriété

**Propriété :**  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors pour tout réel  $C$ , la fonction  $x \mapsto F(x) + C$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

#### Démonstration :

$F$  est une primitive de  $f$ .

On pose  $G(x) = F(x) + C$ .

$$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Donc  $G$  est une primitive de  $f$ .

Exemple : En reprenant la méthode précédente, la fonction définie par  $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$  est également une primitive de  $f$ .

Méthode : Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition

▶ Vidéo <https://youtu.be/CVJNgZPczks>

Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - 3$ .

- 1) Vérifier que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = x^2 - 3x$  est une primitive de  $f$ .
- 2) Déterminer la fonction  $G$  primitive de  $f$  telle que  $G(2) = 1$ .

1)  $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$  donc  $F$  est une primitive de  $f$ .

2)  $G$  est une primitive de  $f$  donc  $G$  est de la forme  $G(x) = x^2 - 3x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Comme  $G(2) = 1$ , on a :

$$2^2 - 3 \times 2 + C = 1$$

$$-2 + C = 1$$

$$C = 1 + 2 = 3$$

D'où  $G(x) = x^2 - 3x + 3$ .

## II. Calculs de primitive

### 1) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitive
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$
$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$

### 2) Linéarité des primitives

Propriété :

Si  $F$  est une primitive de  $f$  et  $G$  est une primitive de  $g$ , alors :

- $F + G$  est une primitive de  $f + g$ ,
- $kF$  est une primitive de  $kf$  avec  $k$  réel.

### Méthode : Recherche de primitives

► Vidéo <https://youtu.be/Stum4aydtRE>

Dans chaque cas, déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$ .

a)  $f(x) = x^4$

b)  $f(x) = 4x^3$

c)  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

d)  $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

e)  $f(t) = 5 \cos(2t - \pi)$

f)  $f(t) = -3 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

a)  $f(x) = x^4$  donc  $F(x) = \frac{1}{4+1} x^{4+1} = \frac{1}{5} x^5$

b)  $f(x) = 4x^3$  donc  $F(x) = 4 \frac{1}{3+1} x^{3+1} = 4 \frac{1}{4} x^4 = x^4$

c)  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$  donc  $F(x) = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + 2 \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 1x = \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x$

d)  $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$  donc :

$$F(x) = 5 \frac{1}{4} x^4 - 2 \frac{1}{3} x^3 + 2 \frac{1}{2} x^2 - 6x = \frac{5}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + x^2 - 6x$$

e)  $f(t) = 5 \cos(2t - \pi)$  donc  $F(t) = \frac{5}{2} \sin(2t + \pi)$  car  $\cos \rightarrow \sin$

f)  $f(t) = -3 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$  donc  $F(t) = -\frac{3}{5} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$  car  $\sin \rightarrow -\cos$

et donc  $F(t) = \frac{3}{5} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$  .

### III. Méthode d'Euler

#### Méthode : Calcul approché d'une primitive par la méthode d'Euler

► Vidéo [https://youtu.be/5Jj6b4AV\\_Ao](https://youtu.be/5Jj6b4AV_Ao)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1 ; 5]$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

A l'aide de la méthode d'Euler et en prenant un pas de 0,5, déterminer une approximation de la primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $[1 ; 5]$  tel que :  $F(1) = 0$ .

On utilise l'approximation suivante, nous donnant de proche en proche des valeurs de  $F$  :

$$\text{Méthode d'Euler : } F(x_{i+1}) \approx F(x_i) + hf(x_i)$$

Le pas est de 0,5 donc  $h = 0,5$ .

Les valeurs successives  $x_i$  sont donc : 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5.

- On sait que :  $F(1) = 0$ .

- La méthode d'Euler, nous permet d'écrire :  $F(1,5) \approx F(1) + hf(1)$

$$\text{Soit : } F(1,5) \approx 0 + 0,5 \times \frac{1}{1} = 0,5$$

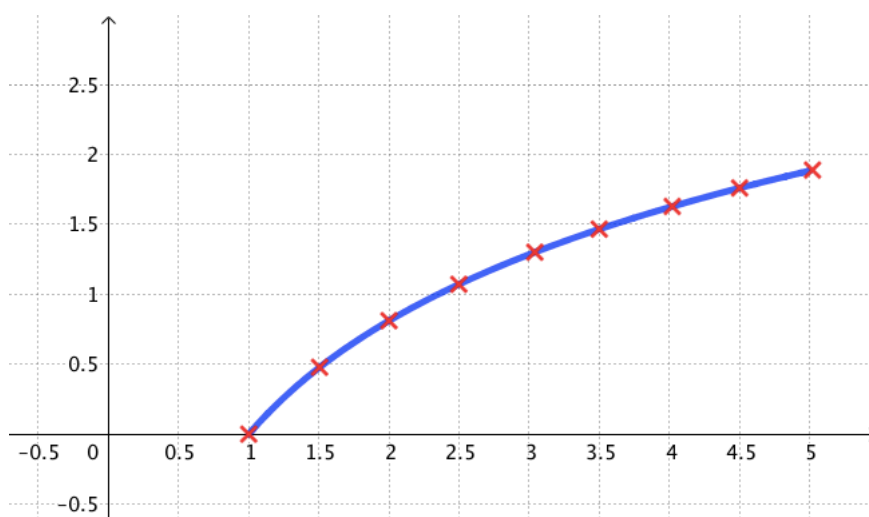
- On poursuit :  $F(2) \approx F(1,5) + hf(1,5)$

$$\text{Soit : } F(2) \approx 0,5 + 0,5 \times \frac{1}{1,5} = 0,833.$$

- Et on poursuit ainsi de proche en proche en complétant le tableau suivant :

$x_i$	$f(x_i)$
1	0
1,5	0,5
2	0,83
2,5	1,08
3	1,28
3,5	1,45
4	1,59
4,5	1,72
5	1,83

Représentons alors point par point une approximation de  $F$  sur  $[1 ; 5]$  :



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)