# PRIMITIVES

## Partie 1 : Primitive d'une fonction

### 1) Définition

Exemple :
On considère les fonctions $f$ et $F$ définies par : $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$
Si on dérive $F$, on constate que : $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
Lorsque $F' = f$, on dit que $F$ est une primitive de $f$.

Définition : $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$.
On appelle **primitive** de $f$, une fonction $F$, telle que : $F' = f$.

Remarque :
Dans ces conditions, dire que « $F$ est une primitive de $f$ »
revient à dire que « $f$ est la dérivée de $F$ ».

Méthode : Démontrer qu'une fonction est une primitive d'une autre

**Vidéo** https://youtu.be/TIo24OoLKio

Soit une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.
Vérifier que la fonction $F$ définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ est une primitive de $f$.

**Correction**
On dérive la fonction $F$ :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2 \times \frac{1}{2}x + 1 + 0. \\ &= x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

Donc : $F' = f$
Et donc $F$ est une primitive de $f$.

### 2) Propriété

Propriété : $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$.
Si $F$ est une primitive de $f$ alors pour tout réel $C$, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de $f$.

Démonstration :
$F$ est une primitive de $f$.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.
Donc $G$ est une primitive de $f$.

Exemple : En reprenant la méthode précédente, la fonction définie par
$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$ est également une primitive de $f$.

Méthode : Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition

Vidéo https://youtu.be/CVJNgZPczks

Soit une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.
a) Vérifier que la fonction $F$ définie par $F(x) = x^2 - 3x$ est une primitive de $f$.
b) Déterminer la fonction $G$ primitive de $f$ telle que $G(2) = 1$.

**Correction**
a) $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$ donc $F$ est une primitive de $f$.

b) $G$ est une primitive de $f$ donc $G$ est de la forme $G(x) = x^2 - 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Comme $G(2) = 1$, on a :
$2^2 - 3 \times 2 + C = 1$
$-2 + C = 1$
$C = 1 + 2 = 3$
D'où $G(x) = x^2 - 3x + 3$.

# Partie 2 : Calculs de primitive

## 1) Primitives des fonctions usuelles

| Fonction | Une primitive |
|---|---|
| $f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$ | $F(x) = ax$ |
| $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ | $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ |
| $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ | $F(t) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$ |
| $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ | $F(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$ |

## 2) Linéarité des primitives

Propriété : Si $F$ est une primitive de $f$ et $G$ est une primitive de $g$, alors :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- $kF$ est une primitive de $kf$ avec $k$ réel.

Méthode : Recherche de primitives

Vidéo https://youtu.be/Stum4aydtRE

Dans chaque cas, déterminer une primitive $F$ de la fonction $f$.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = 4x^3$ c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

**Correction**

a) $f(x) = x^4$ donc $F(x) = \frac{1}{4+1}x^{4+1} = \frac{1}{5}x^5$

b) $f(x) = 4x^3$ donc $F(x) = 4\frac{1}{3+1}x^{3+1} = 4\frac{1}{4}x^4 = x^4$

c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ donc $F(x) = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + 2\frac{1}{2+1}x^{2+1} + 1x = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x$

d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ donc :

$$F(x) = 5\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 6x = \frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 6x$$

e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ donc $F(t) = \frac{5}{2}\sin(2t + \pi)$ car cos → sin

f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ donc $F(t) = -\frac{-3}{5}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ car sin → -cos

et donc $F(t) = \frac{3}{5}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ .

# Partie 3 : Méthode d'Euler

Méthode : Calcul approché d'une primitive par la méthode d'Euler

**Vidéo** https://youtu.be/5Jj6b4AV_Ao

Soit $f$ la fonction définie sur [1 ; 5] par $f(x) = \frac{1}{x}$.

A l'aide de la méthode d'Euler et en prenant un pas de 0,5, déterminer une approximation de la primitive $F$ de la fonction $f$ sur [1 ; 5] tel que : $F(1) = 0$.

**Correction**

On utilise l'approximation suivante, nous donnant de proche en proche des valeurs de $F$ :

*Méthode d'Euler :* $F(x_{i+1}) \approx F(x_i) + hf(x_i)$

Le pas est de 0,5 donc $h$ = 0,5.
Les valeurs successives $x_i$ sont donc : 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5.
- On sait que : $F(1) = 0$.

- La méthode d'Euler, nous permet d'écrire : $F(1{,}5) \approx F(1) + hf(1)$

Soit : $F(1,5) \approx 0 + 0,5 \times \frac{1}{1} = 0,5$

- On poursuit : $F(2) \approx F(1,5) + hf(1,5)$

Soit : $F(2) \approx 0,5 + 0,5 \times \frac{1}{1,5} = 0,833.$

- Et on poursuit ainsi de proche en proche en complétant le tableau suivant :

| $x_i$ | $F(x_i)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1,5 | 0,5 |
| 2 | 0,83 |
| 2,5 | 1,08 |
| 3 | 1,28 |
| 3,5 | 1,45 |
| 4 | 1,59 |
| 4,5 | 1,72 |
| 5 | 1,83 |

Représentons alors point par point une approximation de $F$ sur [1 ; 5] :