NOMBRES COMPLEXES (Partie 1)

I. L'ensemble $\mathbb{C}$

1) Définition

Définition : Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.

Vocabulaire :
- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et la nombre b s'appelle la **partie imaginaire**.

Exemples :
Les nombres suivants sont des nombres complexes :
- $3 + 4i$: 3 est la partie réelle et 4 est la partie imaginaire
- $-2 - i$: –2 est la partie réelle et –1 est la partie imaginaire
- $\frac{i}{3}$: 0 est la partie réelle et $\frac{1}{3}$ est la partie imaginaire.

Remarques :
- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors z est un nombre imaginaire pur.

Méthode : Effectuer des calculs sur les nombres complexes

Vidéo https://youtu.be/-aaSfL2fhTY
Vidéo https://youtu.be/rva2e2UN3nM

Calculer et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ $\quad z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$ $\quad z_3 = (2 - 3i)^2$ $\quad z_4 = \frac{1+i}{2-i}$

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - 5i - (3i - 4) \\ &= 3 - 5i - 3i + 4 \\ &= 7 - 8i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= (3 - 2i)(-1 + 5i) \\ &= -3 + 15i + 2i - 10i^2 \\ &= -3 + 15i + 2i + 10, \text{ car } i^2 = -1 \\ &= 7 + 17i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= (2 - 3i)^2 \\ &= 4 - 12i + 9i^2 \\ &= 4 - 12i - 9 \\ &= -5 - 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{1+i}{2-i} \\ &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2+i+2i+i^2}{2^2-i^2} \\ &= \frac{2+i+2i-1}{2^2+1} \\ &= \frac{1+3i}{5} \\ &= \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i \end{aligned}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée de $2-i$, soit : $2+i$.

Dans la suite du chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

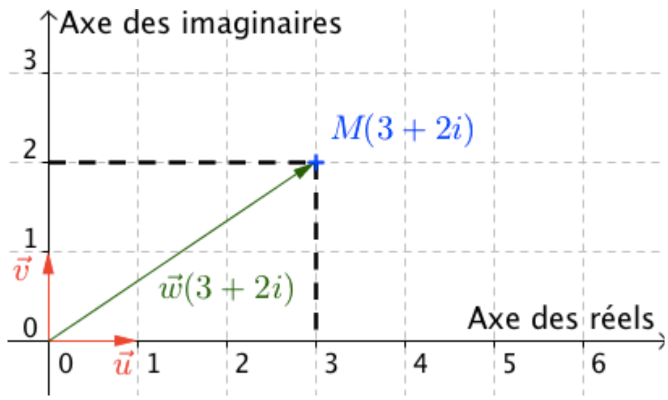
2) Représentation dans le plan complexe

Définition :
A tout point $M(a\,;b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a\,;b)$, on associe le nombre complexe $z=a+ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.
On note M(z) et $\vec{w}(z)$.

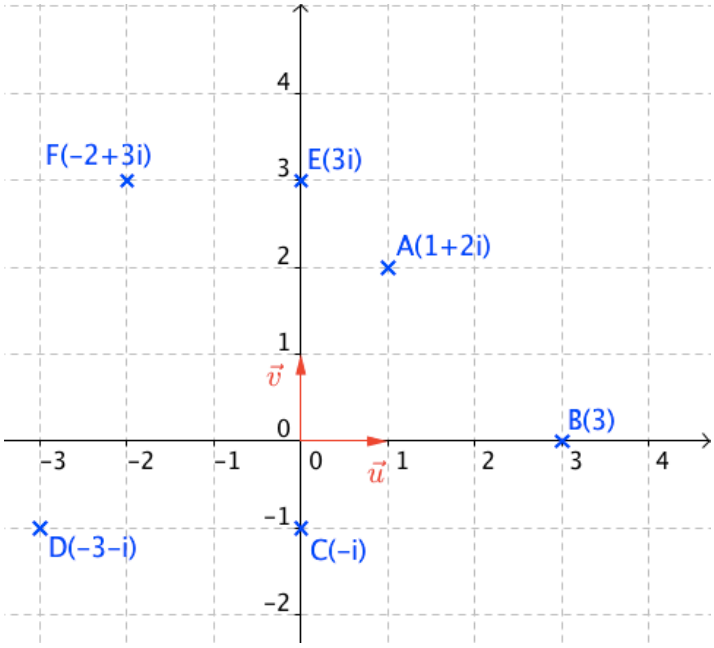
Exemple :

Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

Le point M(3 ; 2) a pour affixe le nombre complexe $z=3+2i$.
De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z'=3-2i$.



Autres exemples :

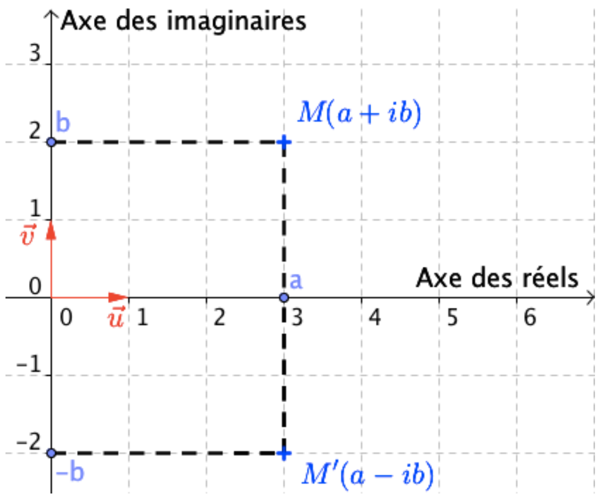


II. Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a - ib$.

Exemples :
- $z = 4 + 5i$ et $\bar{z} = 4 - 5i$
- On peut également noter :
$\overline{7 - 3i} = 7 + 3i$; $\bar{i} = -i$; $\bar{5} = 5$

Remarque :
Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Propriétés :

a) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ b) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ c) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec $z' \neq 0$

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration : $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Méthode : Déterminer un conjugué

Vidéo https://youtu.be/WhKHo9YwafE

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = (2-i)(i-5)$

$z_2 = \frac{3+2i}{i}$

$$\begin{aligned}\overline{z_1} &= \overline{(2-i)(i-5)}\\ &= \overline{(2-i)}\ \overline{(i-5)}\\ &= (2+i)(-i-5)\\ &= -2i-10+1-5i\\ &= -9-7i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z_2} &= \overline{\left(\frac{3+2i}{i}\right)}\\ &= \frac{\overline{3+2i}}{\overline{i}}\\ &= \frac{3-2i}{-i}\\ &= \frac{(3-2i)i}{-i\times i}\\ &= \frac{3i-2i^2}{1}\\ &= 2+3i\end{aligned}$$