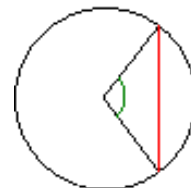


# TRIGONOMETRIE (Partie I)

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/wJjb3CSS3cg>

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie. Mais on attribue à *Hipparque de Nicée* (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.



Le grec *Claude Ptolémée* (90? ; 160?) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'*Hipparque* avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.



Plus tard, l'astronome et mathématicien *Regiomontanus* (1436 ; 1476), de son vrai nom *Johann Müller* (ci-contre) développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme *sinus*.

Au XVI<sup>e</sup> siècle, le français *François Viète* (1540 ; 1607), conseiller d'*Henri IV*, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

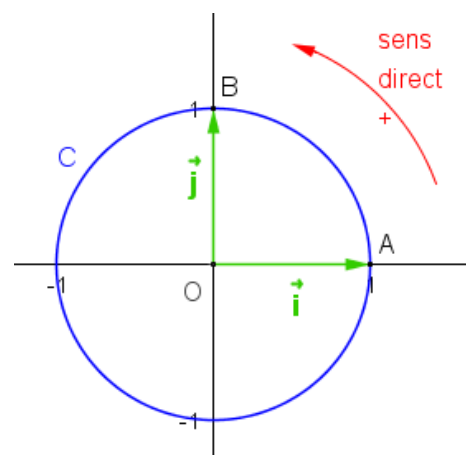
De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.

## I. Cercle trigonométrique et radian

### 1) Le cercle trigonométrique

**Définition :** Sur un cercle, on appelle **sens direct, sens positif ou sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

**Définition :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

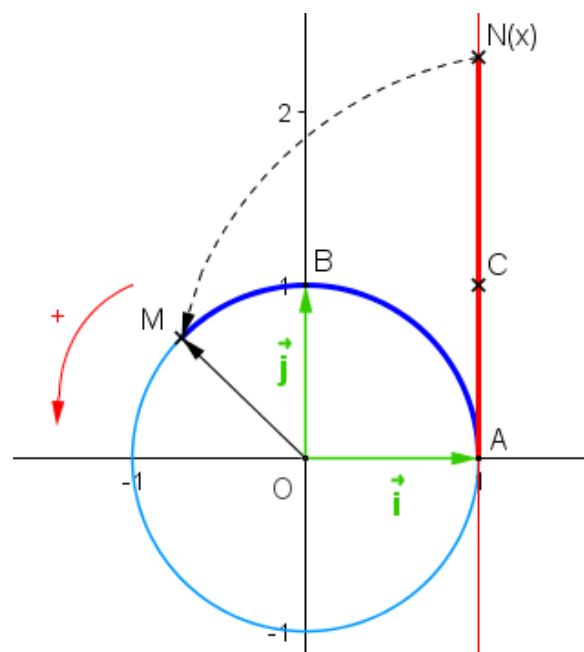


## 2) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que  $(A ; \vec{j})$  soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse  $x$  de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc  $\widehat{AM}$  est ainsi égale à la longueur AN.



## 3) Le radian

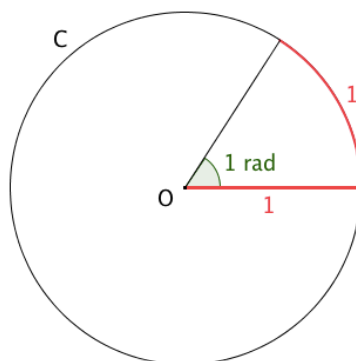
La longueur du cercle trigonométrique est égale à  $2\pi$ .

En effet, son rayon est 1 donc  $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel  $2\pi$ . On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure  $360^\circ$  ou  $2\pi$  radians.

### Définition :

On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



## 4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à  $2\pi$  radians (tour complet), on fait correspondre un angle de  $360^\circ$ . Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$360^\circ$
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$2\pi$

**Méthode :** Passer des degrés aux radians et réciproquement

► Vidéo <https://youtu.be/-fu9bSBKM00>

- 1) Donner la mesure en radians de l'angle  $\alpha$  de mesure  $33^\circ$ .
- 2) Donner la mesure en degrés de l'angle  $\beta$  de mesure  $\frac{3\pi}{8}$  rad.

$2\pi$	?	$\frac{3\pi}{8}$
$360^\circ$	$33^\circ$	?

$$1) \alpha = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11\pi}{60} \quad 2) \beta = \frac{3\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = 67,5^\circ$$

## II. Mesure d'un angle orienté

### 1) Plusieurs enroulements de la droite

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.

**Exemples :**

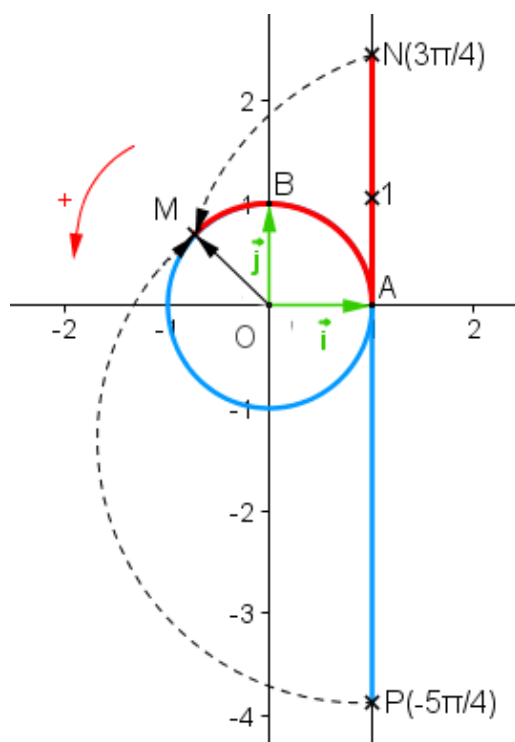
- Ci-contre, les points N et P d'abscisses  $\frac{3\pi}{4}$  et  $-\frac{5\pi}{4}$  correspondent tous les deux au point M.

$$\text{En effet : } \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$$

- On pourrait poursuivre le processus dans l'autre sens en effectuant deux tours successifs.

Ainsi, les points d'abscisses  $\frac{3\pi}{4}$  et  $\frac{19\pi}{4}$  correspondent au point M.

$$\text{En effet : } \frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4}.$$



**Méthode :** Placer un point sur le cercle trigonométrique

► Vidéo <https://youtu.be/jE3ibn-8fDI>

- 1) Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle  $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$  mesure  $\frac{9\pi}{4}$  rad.

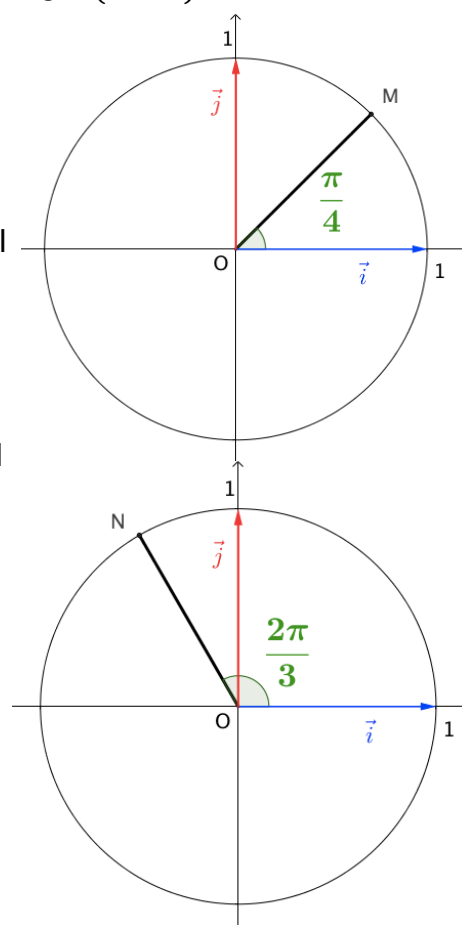
2) Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle  $(\vec{i}; \overrightarrow{ON})$  mesure  $\frac{8\pi}{3}$  rad.

$$1) \frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle  $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$  mesure  $\frac{\pi}{4}$  rad.

$$2) \frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle  $(\vec{i}; \overrightarrow{ON})$  mesure  $\frac{2\pi}{3}$  rad.



## 2) Mesure principale d'un angle orienté

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.

Si  $\theta$  est une mesure de l'angle  $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$  alors tout angle de la forme  $\theta + k \times 2\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ , est une mesure de l'angle  $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ .

On dit que l'angle  $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$  est égal à  $\theta$  **modulo**  $2\pi$ .

**Définition :** La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ .

### Exemple :

Une mesure d'un angle orienté est  $\frac{7\pi}{4}$ .

D'autres mesures sont :  $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$  ;  $\frac{7\pi}{4} - 4\pi$  ;  $\frac{7\pi}{4} - 6\pi$  ; ... soit :  $-\frac{\pi}{4}$  ;  $-\frac{9\pi}{4}$  ;  $-\frac{17\pi}{4}$  ; ...

$-\frac{\pi}{4}$  est la mesure principale de cet angle orienté car c'est la seule comprise entre  $-\pi$  exclu et  $\pi$ .

Méthode : Donner la mesure principale d'un angle

 Vidéo <https://youtu.be/BODMdi2S3rY>

Donner la mesure principale de l'angle  $\frac{27\pi}{4}$ .

- On choisit un multiple de 4 proche de 27, soit 28 :

$$\begin{aligned}\frac{27\pi}{4} &= \frac{28\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \\ &= 7\pi - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

- Dans  $7\pi$ , on fait apparaître un multiple de  $2\pi$ , soit  $6\pi$  :

$$\begin{aligned}\frac{27\pi}{4} &= 6\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \\ &= 6\pi + \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \\ &= 6\pi + \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

$6\pi$  correspond à 3 tours entiers.

$\frac{3\pi}{4}$  est bien compris entre  $-\pi$  exclu et  $\pi$ .

La mesure principale de  $\frac{27\pi}{4}$  est  $\frac{3\pi}{4}$ .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)