

SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/05UHsy9G4M4>

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.

Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 3,$$

$$u_1 = 8,$$

$$u_2 = 13,$$

$$u_3 = 18.$$

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_0 = 3$.

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

▶ Vidéo <https://youtu.be/YCokWYcBBOk>

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9.$

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9 .

(u_n) est une suite arithmétique de raison -9 .

2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1.$

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.

(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

▶ Vidéo <https://youtu.be/6O0KhPMHvBA>

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$

Démonstration au programme :

 **Vidéo** https://youtu.be/Jn4_xM_ZJD0

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

En calculant les premiers termes :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r$$

...

$$u_n = u_{n-1} + r$$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + n \times r$$

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :

$$u_n = u_0 + nr$$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

 **Vidéo** <https://youtu.be/iEuoMgBblz4>

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

- 1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .
- 2) Exprimer u_n en fonction de n .

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$

Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et

$$u_9 = u_0 + 9r = 19.$$

En soustrayant membre à membre, on obtient : $u_0 + 5r - u_0 - 9r = 7 - 19$

Soit : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.

Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $u_0 = -8$.

2) $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = -8 + n \times 3$ ou encore $u_n = 3n - 8$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.

- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

 **Vidéo** <https://youtu.be/R3sHNwOb02M>

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr

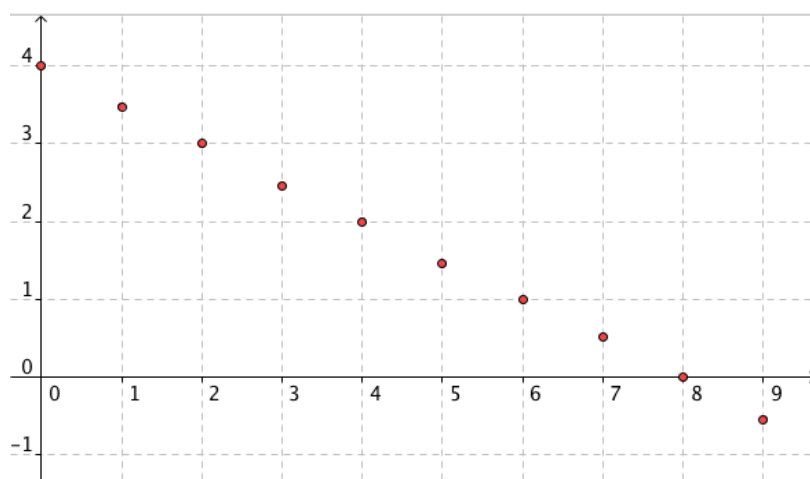
La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante car de raison négative et égale à -4 .

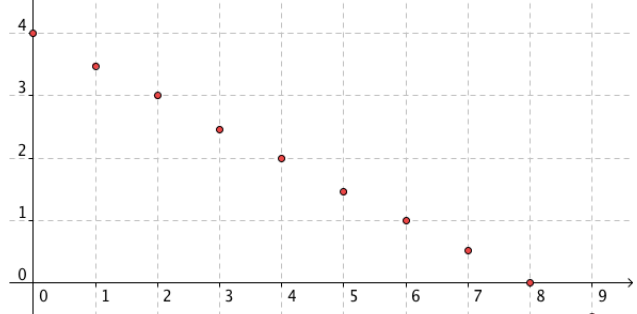
3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite de raison $-0,5$ et de premier terme 4.



| RÉSUMÉ | (u_n) une suite arithmétique - de raison r - de premier terme u_0 . | Exemple : $r = -0,5$ et $u_0 = 4$ |
|--------------------------|---|---|
| Définition | $u_{n+1} = u_n + r$ | $u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0,5$. |
| Propriété | $u_n = u_0 + nr$ | $u_n = 4 - 0,5n$ |
| Variations | Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante. | $r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés. |  |

II. Suites géométriques

1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 5,$$

$$u_1 = 10,$$

$$u_2 = 20,$$

$$u_3 = 40.$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 5$.

 Vidéo <https://youtu.be/WTmdtbQpa0c>

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

 Vidéo <https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ>

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.

Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$$

$$u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$$

$$u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500 \times 1,04^n$.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration au programme :

 Vidéo <https://youtu.be/OpLU8C1GnE>

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr

La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

- Si q ou u_0 est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.

- Dans la suite, on suppose donc que q et u_0 sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :

$$u_1 = q \times u_0$$

$$u_2 = q \times u_1$$

$$u_3 = q \times u_2$$

...

$$u_n = q \times u_{n-1}$$

En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times q^n$$

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques : $u_n = u_0 \times q^n$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

 Vidéo <https://youtu.be/wUfleWpRr10>

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.

Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 \times q^n$.

$$\text{Donc : } u_4 = u_0 \times q^4 = 8 \text{ et}$$

$$u_7 = u_0 \times q^7 = 512.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{u_7}{u_4} = \frac{u_0 \times q^7}{u_0 \times q^4} = q^3 \text{ et } \frac{u_7}{u_4} = \frac{512}{8} = 64 \text{ donc } q^3 = 64.$$

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

$$\text{Ainsi } q = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\text{Comme } u_0 \times q^4 = 8, \text{ on a : } u_0 \times 4^4 = 8 \text{ et donc : } u_0 = \frac{1}{32}.$$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0 .

Pour $u_0 > 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q - 1).$$

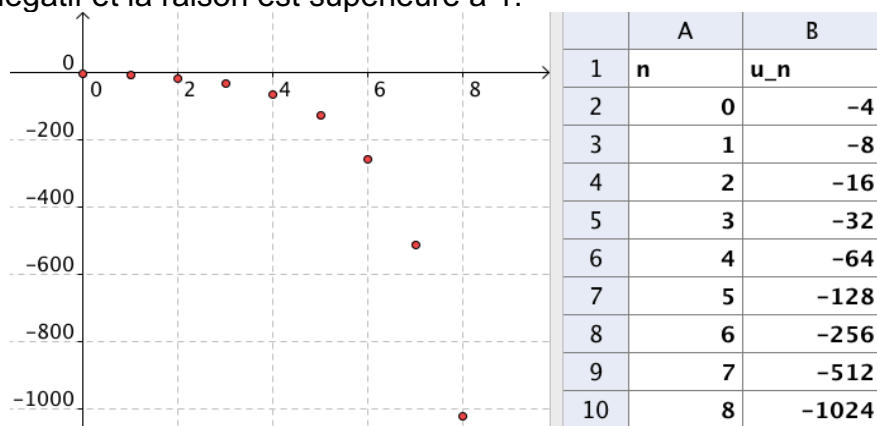
- Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

- Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

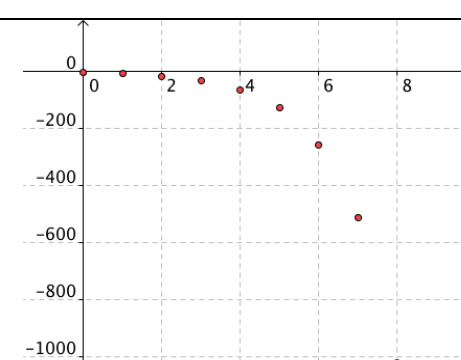
Exemple :

 Vidéo <https://youtu.be/vLshnJqW-64>

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

| RÉSUMÉ | (u_n) une suite géométrique de raison q de premier terme u_0 . | Exemple : $q = 2$ et $u_0 = -4$ |
|--------------------------|--|--|
| Définition | $u_{n+1} = q \times u_n$ | $u_{n+1} = 2u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2. |
| Propriété | $u_n = u_0 \times q^n$ | $u_n = -4 \times 2^n$ |
| Variations | Pour $u_0 > 0$: Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si $q > 1$: (u_n) est décroissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est croissante. | $u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante. |  |

2) Cas d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** <https://youtu.be/7msY7aEe084>

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}$$

Ainsi :

$$S - q \times S = (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1})$$

$$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$$

$$S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/eSDrE1phUXY>

Calculer la somme S suivante :

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{13}$$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{13}$$

$$= \frac{1 - 3^{14}}{1 - 3}$$

$$= 2\,391\,484$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales