LES SUITES – Chapitre 2/2

Reconnaitre une suite arithmétique et une suite géométrique
Vidéo https://youtu.be/pHq6oClOylU

Partie 1 : Suites arithmétiques

1) Définition

Exemples :
a) Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant 5.
Si le premier terme est égal à 3, les termes suivants sont :
$u_0 = 3$,
$u_1 = 8$,
$u_2 = 13$,
$u_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

b) Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme 5 et de raison -2.
Les premiers termes successifs sont :
$v_0 = 5$,
$v_1 = 5 - 2 = 3$,
$v_2 = 3 - 2 = 1$,
$v_3 = 1 - 2 = -1$.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration :
$u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

Étudier les variations des suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par :

a) $u_n = 3 + 5n$ b) $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = v_n - 4 \end{cases}$

Correction

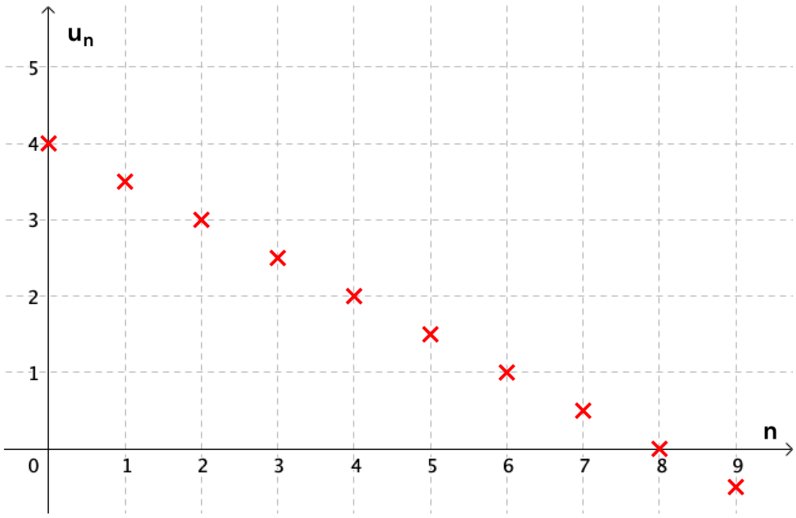
a) (u_n) est croissante car de raison positive et égale à 5.

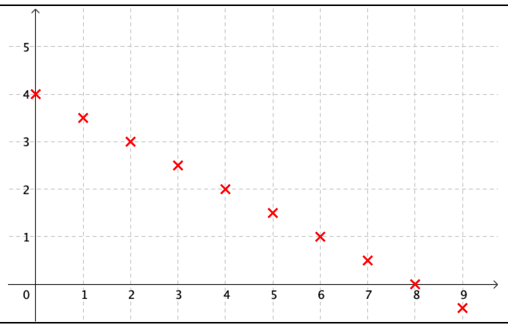
b) On passe d'un terme au suivant en ajoutant -4. (v_n) est décroissante car de raison négative et égale à -4.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple : On a représenté ci-dessous la suite arithmétique de raison –0,5 et de premier terme 4.



RÉSUMÉ	(u_n) une suite arithmétique - de raison r - de premier terme u_0.	Exemple : $r = -0{,}5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0{,}5$.
Sens De variation	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0{,}5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés. La croissance est linéaire.	

Partie 2 : Suites géométriques

1) Définition

Exemples :

a) Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2.
Si le premier terme est égal à 5, les termes suivants sont :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 10$,
$u_2 = 20$,
$u_3 = 40$.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

b) Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme 4 et de raison 0,1.
Les premiers termes successifs sont :
$v_0 = 4$
$v_1 = 0{,}1 \times 4 = 0{,}4$
$v_2 = 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}04$
$v_3 = 0{,}1 \times 0{,}04 = 0{,}004$
La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 0{,}1 \times v_n \end{cases}$

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q, strictement positif, tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Remarque : Dans le cas où $q < 0$, la suite est également géométrique mais cette situation n'est pas au programme cette année.

Exemple concret :
On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 %.
Chaque année, le capital est donc multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$
$u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$
$u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$

De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 strictement positif.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique

Déterminer le sens de variation des suites géométriques (u_n) et (v_n) définies par :

a) $u_n = 4 \times 2^n$ b) $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$

Correction

a) La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 4 \times 2^n$ est croissante car $q = 2$ donc $q > 1$

b) La suite géométrique (v_n) définie par $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ et $v_0 = 2$ est décroissante car $q = \frac{1}{2}$ donc $0 < q < 1$.

RÉSUMÉ	(u_n) une suite géométrique de raison q positive de premier terme u_0 positif.	Exemple : $q = 2$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Sens de variation	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	$q = 2 > 1$ La suite (u_n) est croissante.
Représentation graphique	On parle de croissance exponentielle.