FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

Chapitre 2/2

Partie 1 : Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 2

Exemple :
La fonction f définie par $f(x) = 2(x-2)(x+2)$ est une fonction du second degré.
En effet, elle s'écrit aussi sous la forme $x \longmapsto ax^2 + b$.

$f(x) = 2(x-2)(x+2) = 2(x^2-4) = 2x^2 - 8$.

Définition : Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.
Les coefficients a, x_1 et x_2 sont des réels avec $a \neq 0$.

A noter : Plus généralement, on appelle fonction polynôme de degré 2, toute fonction qui s'écrit sous la forme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$.
Par exemple, la fonction $x \longmapsto 3x^2 - 2x + 1$ est une fonction polynôme du second degré.

Propriété : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$ et $x = x_2$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f.

Propriété : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
La droite d'équation $x = p$ avec $p = \frac{x_1+x_2}{2}$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f.

Méthode : Représenter graphiquement une fonction du second degré à partir de sa forme factorisée.

Vidéo https://youtu.be/riqMPcUT_Ts

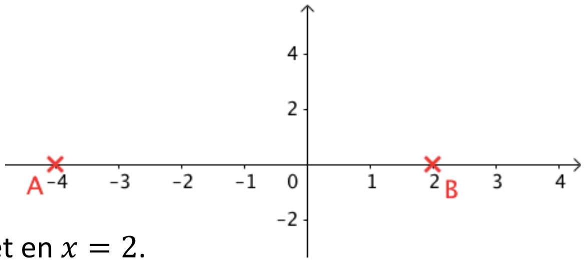
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-2)(x+4)$.
Déterminer :

a) l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses,
b) son axe de symétrie,
c) les coordonnées de son extremum.

Placer au fur et à mesure ces éléments géométriques dans un repère puis tracer la parabole représentant la fonction f.

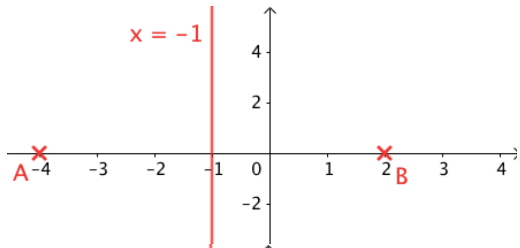
Correction

a) Pour déterminer l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Soit : $2(x-2)(x+4) = 0$.
Il s'agit d'une équation-produit. On a donc :
$x - 2 = 0$ ou $x + 4 = 0$ soit : $x = 2$ ou $x = -4$.

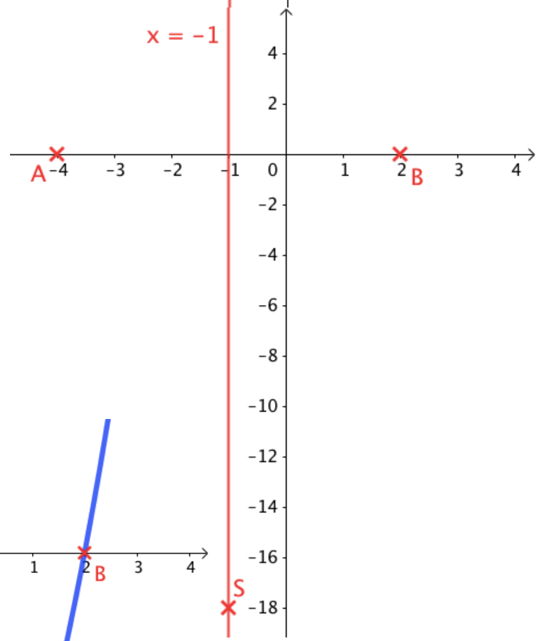


La courbe de f traverse l'axe des abscisses en $x = -4$ et en $x = 2$.
On peut marquer ces deux points d'intersection, A et B, dans le repère.

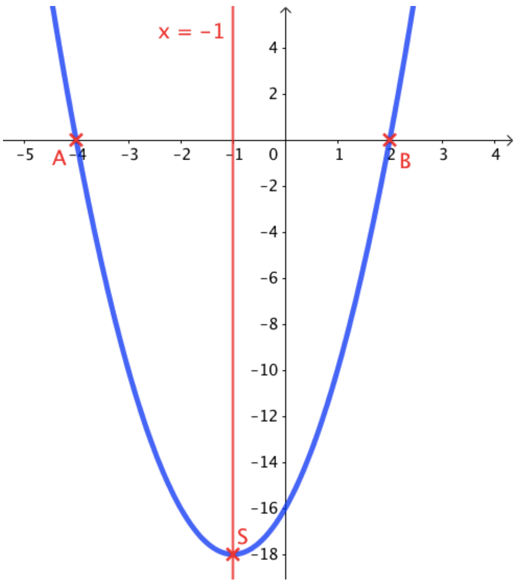
b) Ici, $f(x) = 2(x-2)(x+4)$ donc $x_1 = 2$ et $x_2 = -4$, et donc $p = \frac{2-4}{2} = -1$.
La droite d'équation $x = -1$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f.
On peut tracer cette droite dans le repère.



c) - Le sommet S de la parabole se trouve sur l'axe de symétrie, donc il a pour abscisse p = –1 et pour ordonnées :
$f(p) = f(-1) = 2(-1-2)(-1+4)$
$= 2 \times (-3) \times 3 = -18$
Le sommet de la parabole S est donc le point de coordonnées (–1 ; –18).
On peut placer le point S dans le repère.
- L'expression de la fonction f est
$f(x) = 2(x-2)(x+4)$, donc a = 2 > 0.



On en déduit que la parabole représentant la fonction f possède des branches tournées vers le haut.
Le sommet de la parabole correspond donc au minimum de la fonction f.
On trace ainsi la parabole passant par les points S, A et B.

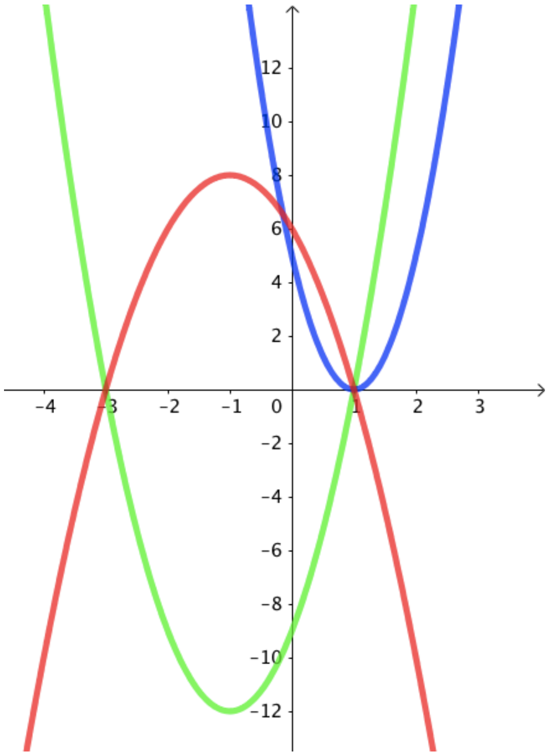


Méthode : Associer une fonction du second degré à sa représentation graphique

Vidéo https://youtu.be/Yrt2Cdx1uk4

Associer chaque fonction à sa représentation graphique :

$$f(x) = 3(x-1)(x+3)$$
$$g(x) = -2(x-1)(x+3)$$
$$h(x) = 5(x-1)^2$$



Correction

- On a : $h(x) = 5(x-1)^2 = 5(x-1)(x-1)$.
La fonction h est la seule à posséder une racine double égale à 1. Cela signifie que la parabole correspondante ne possède qu'un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses.
La **parabole bleue** intercepte l'axe des abscisses en 1 uniquement, c'est donc la représentation graphique de la fonction h.

- Les fonctions f et g sont de la forme $f(x) = 3(x-1)(x+3)$ et $g(x) = -2(x-1)(x+3)$.
Ces fonctions possèdent donc toutes les deux les mêmes racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.
On peut donc les associer à la **parabole rouge** et à la **parabole verte** qui passent toutes les deux par les points d'abscisse –3 et 1.
Les branches de la **parabole verte** sont tournées vers le haut donc $a > 0$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto a(x-x_1)(x-x_2)$.
Ainsi, la **parabole verte** représente la fonction f pour qui $a = 3 > 0$.
La **parabole rouge** représente alors la fonction g.

Méthode : Factoriser une expression du second degré

Vidéo https://youtu.be/FoNm-dlJQLc

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Conjecturer une racine de la fonction polynôme f et vérifier par calcul.
b) Factoriser f.

Correction
a) On peut conjecturer que 1 est racine de la fonction polynôme f.
En effet, $f(1) = 2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$.

b) D'après l'expression de la fonction f, on a : $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
On peut affirmer que $a = 2$.
Par ailleurs, 1 est une racine de f. Donc, sous sa forme factorisée, f s'écrit :
$f(x) = 2(x - 1)(x - x_2)$.
Il s'agit donc de déterminer x_2, tel que : $2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x - x_2)$.
En prenant par exemple $x = 0$, cette égalité s'écrit : $-6 = 2(-1)(-x_2)$, soit $-6 = 2x_2$ ou encore $-3 = x_2$.
Ainsi, sous sa forme factorisée, la fonction polynôme f s'écrit $f(x) = 2(x - 1)\big(x - (-3)\big)$ ou encore $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$.

Partie 2 : Signe d'une fonction polynôme de degré 2

Méthode : Étudier le signe d'un polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/EjR6TCc_fdg

Étudier le signe de la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$

Correction

Le signe de $-2(x - 3)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur -2, $x - 3$ et $x + 2$.
On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

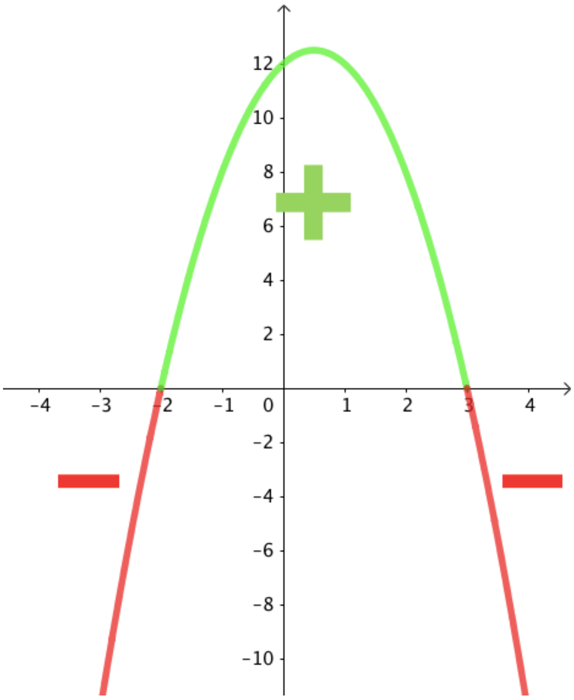
$x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$
$x = 3$ $\quad$ $x = -2$

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2(x-3)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-2\ ;3]$ et
$f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -2] \cup [3\ ;\ +\infty[$.

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.



Partie 3 : Équation de la forme x² = c

Propriété :
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = c$ dépendent du signe de c.
Si $c < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
Si $c = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
Si $c > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{c}$ et $-\sqrt{c}$.

Méthode : Résoudre une équation du type $x^2 = c$

Vidéo https://youtu.be/ef15aeQRs6w

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = -8$ c) $2x^2 - 8 = 120$

Correction
a) 16 est positif donc l'équation $x^2 = 16$ admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et
$x = -\sqrt{16} = -4$.

b) –8 est négatif donc l'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

c) $2x^2 - 8 = 120$
$2x^2 = 120 + 8$
$2x^2 = 128$
$x^2 = 64$

L'équation admet donc deux solutions $x = \sqrt{64} = 8$ et $x = -\sqrt{64} = -8$.