

FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2 (Partie 2)

I. Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 2

Exemple :

La fonction f définie par $f(x) = 2(x - 2)(x + 2)$ est une fonction du second degré. En effet, elle s'écrit aussi sous la forme $x \mapsto ax^2 + b$.

$$f(x) = 2(x - 2)(x + 2) = 2(x^2 - 4) = 2x^2 - 8.$$

Définition : Les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ sont des fonctions polynômes du second degré.

Les coefficients a , x_1 et x_2 sont des réels avec $a \neq 0$.

A noter : Plus généralement, on appelle fonction polynôme du second degré, toute fonction qui s'écrit sous la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Par exemple, la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ est une fonction polynôme du second degré.

Méthode : Représenter graphiquement une fonction du second degré à partir de sa forme factorisée.

Vidéo https://youtu.be/riqMPcUT_Ts

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2(x - 2)(x + 4)$.

Déterminer :

- l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses,
- son axe de symétrie,
- les coordonnées de son extremum.

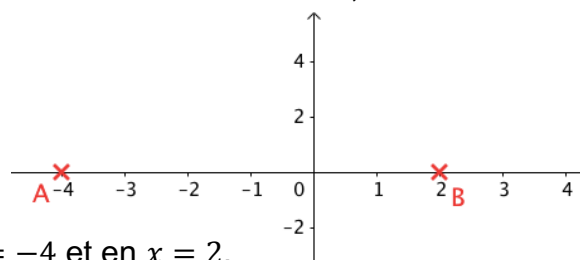
Placer au fur et à mesure ces éléments géométriques dans un repère puis tracer la parabole représentant la fonction f .

a) Pour déterminer l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\text{Soit : } 2(x - 2)(x + 4) = 0.$$

Il s'agit d'une équation-produit. On a donc :

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \text{ soit : } x = 2 \text{ ou } x = -4.$$



La courbe de f traverse l'axe des abscisses en $x = -4$ et en $x = 2$.

On peut marquer ces deux points d'intersection, A et B, dans le repère.

Propriété : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$ et $x = x_2$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f .

b)

Propriété : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
La droite d'équation $x = p$ avec $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f .

Ici, $f(x) = 2(x - 2)(x + 4)$ donc $x_1 = 2$ et $x_2 = -4$, et donc $p = \frac{2-4}{2} = -1$.

La droite d'équation $x = -1$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f .
On peut tracer cette droite dans le repère.

c) - Le sommet S de la parabole se trouve sur l'axe de symétrie, donc il a pour abscisse $p = -1$ et pour ordonnées :

$$f(p) = f(-1) = 2(-1 - 2)(-1 + 4) = 2 \times (-3) \times 3 = -18$$

Le sommet de la parabole S est donc le point de coordonnées $(-1 ; -18)$.

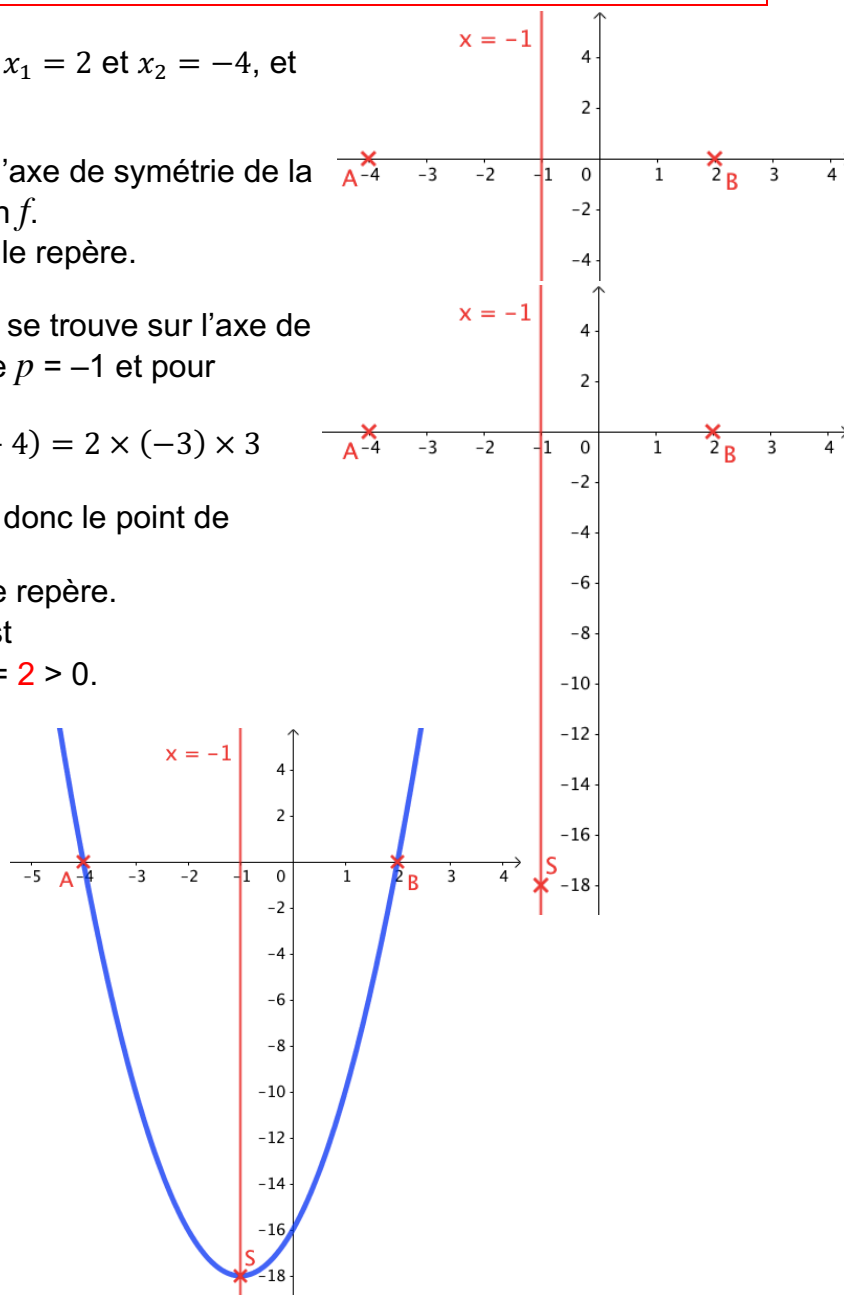
On peut placer le point S dans le repère.

- L'expression de la fonction f est

$$f(x) = 2(x - 2)(x + 4), \text{ donc } a = 2 > 0.$$

On en déduit que la parabole représentant la fonction f possède des branches tournées vers le haut. Le sommet de la parabole correspond donc au minimum de la fonction f .

On trace ainsi la parabole passant par les points S, A et B.



Méthode : Associer une fonction du second degré à sa représentation graphique

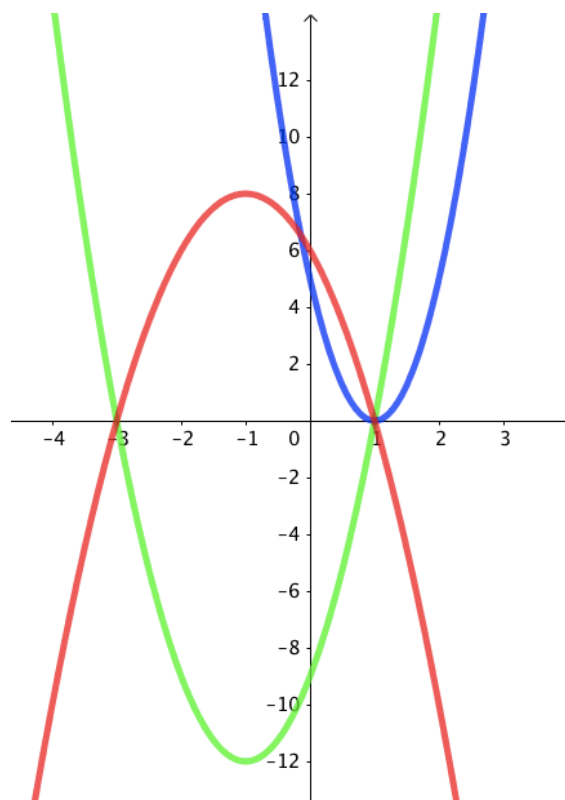
📺 Vidéo <https://youtu.be/Yrt2Cdx1uk4>

Associer chaque fonction à sa représentation graphique :

$$f(x) = 3(x - 1)(x + 3)$$

$$g(x) = -2(x - 1)(x + 3)$$

$$h(x) = 5(x - 1)^2$$



- On a : $f(x) = 5(x - 1)^2 = 5(x - 1)(x - 1)$.

La fonction h est la seule à posséder une **racine double égale à 1**. Cela signifie que la parabole correspondante ne possède qu'un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses.

La **parabole bleue** intercepte l'axe des abscisses en 1 uniquement, c'est donc la représentation graphique de la fonction h .

- Les fonctions f et g sont de la forme $f(x) = 3(x - 1)(x + 3)$ et $g(x) = -2(x - 1)(x + 3)$

Ces fonctions possèdent donc toutes les deux les mêmes racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$. On peut donc les associer à la **parabole rouge** et à la **parabole verte** qui passent toutes les deux par les points d'abscisse -3 et 1 .

Les branches de la **parabole verte** sont tournées vers le haut donc $a > 0$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ainsi, la **parabole verte** représente la fonction f pour qui $a = 3 > 0$.

La **parabole rouge** représente alors la fonction g .

Méthode : Factoriser une expression du second degré

📺 Vidéo <https://youtu.be/FoNm-dIJQLc>

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

- a) Conjecturer une racine de la fonction polynôme f et vérifier par calcul.
 b) Factoriser f .

a) On peut conjecturer que 1 est racine de la fonction polynôme f .
 En effet, $f(1) = 2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$.

b) D'après l'expression de la fonction f , $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$, on peut affirmer que $a = 2$.

Par ailleurs, 1 est une racine de f . Donc, sous sa forme factorisée, f s'écrit :

$$f(x) = 2(x - 1)(x - x_2).$$

Il s'agit donc de déterminer x_2 , tel que : $2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x - x_2)$.

En prenant par exemple $x = 0$, cette égalité s'écrit : $-6 = 2(-1)(-x_2)$, soit $-6 = 2x_2$
 ou encore $-3 = x_2$.

Ainsi, sous sa forme factorisée, la fonction polynôme f s'écrit $f(x) = 2(x - 1)(x - (-3))$
 ou encore $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$.

II. Signe d'une fonction polynôme de degré 2

Méthode : Étudier le signe d'un polynôme du second degré

 Vidéo https://youtu.be/EjR6TCc_fdg

Étudier le signe de la fonction polynôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$

Le signe de $-2(x - 3)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur -2 , $x - 3$ et $x + 2$.
 On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

$$\begin{array}{l} x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \\ x = 3 \quad \quad \quad x = -2 \end{array}$$

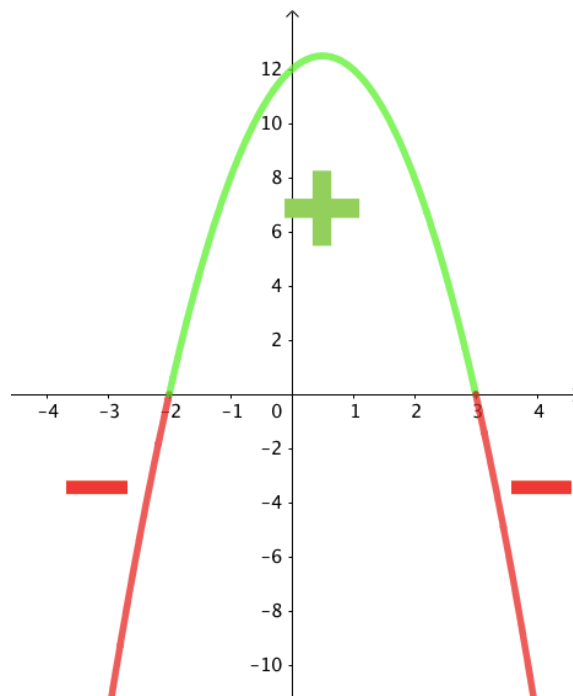
En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	
$-2(x - 3)(x + 2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-2 ; 3]$ et

$f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty ; -2] \cup [3 ; +\infty[$.

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.



III. Equation de la forme $x^2 = c$

Méthode : Résoudre une équation du type $x^2 = c$

📺 Vidéo <https://youtu.be/ef15aeQRs6w>

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a) $x^2 = 16$

b) $x^2 = -8$

c) $2x^2 - 8 = 120$

Propriété :

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 = c$ dépendent du signe de c .

Si $c < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

Si $c = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.

Si $c > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont \sqrt{c} et $-\sqrt{c}$.

a) 16 est positif donc l'équation $x^2 = 16$ admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.

b) -8 est négatif donc l'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

$$c) 2x^2 - 8 = 120$$

$$2x^2 = 120 + 8$$

$$2x^2 = 128$$

$$x^2 = 64$$

L'équation admet donc deux solutions $x = \sqrt{64} = 8$ et $x = -\sqrt{64} = -8$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales