SECOND DEGRÉ – Chapitre 2/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/tc9wvbYuZts

Partie 1 : Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple :
L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/7VFpZ63Tgis

On a vu dans « Second degré - Chapitre 1/2 » que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :
$ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

car a est non nul.

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Vidéo https://youtu.be/youUIZ-wsYk
Vidéo https://youtu.be/RhHheS2Wpyk
Vidéo https://youtu.be/v6fI2RqCCiE

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Correction

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

$a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$$

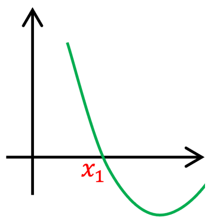
c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

$a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Définition :
Pour une fonction polynôme f du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'appelle les **racines** de f.

Remarque : Dans la pratique, une racine x_1 de f vérifie $f(x_1) = 0$.
La courbe de f coupe l'axe des abscisses en x_1.



Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Méthode : Utiliser les formules de somme et produit des racines

Vidéo A venir bientôt

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + x + 1$.
1) Montrer que $x_1 = 1$ est une racine de f.
2) Déterminer la deuxième racine.

Correction
1) x_1 est une racine si elle vérifie $f(x_1) = 0$.
$f(x_1) = f(1) = -2 \times 1^2 + 1 + 1 = 0$.
Donc x_1 est une racine de f.

2) En utilisant le produit des racines, on a :
$P = x_1 \times x_2 = 1 \times x_2 = x_2$
Et $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.
Donc $x_2 = -\frac{1}{2}$
Et donc f admet $x_2 = -\frac{1}{2}$ comme deuxième racine.

Partie 2 : Factorisation et signe d'un trinôme

1) Factorisation

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$, avec x_0 racine de f.
- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec x_1 et x_2 racines de f.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode : Déterminer les fonctions du second degré, s'annulant en deux nombres réels distincts

Vidéo https://youtu.be/JiokX41_2nw

On considère la fonction polynôme f du second degré s'annulant en -1 et 2 et tel que $f(3) = -2$. Déterminer une expression factorisée de la fonction f.

Correction

● Comme la fonction f s'annule en -1 et 2, on peut affirmer que -1 et 2 sont les racines de f.
Et donc : $f(x) = a(x - (-1))(x - 2) = a(x + 1)(x - 2)$.

● De plus, $f(3) = -2$
Donc : $a(3 + 1)(3 - 2) = -2$
$a \times 4 \times 1 = -2$
$a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

● On en déduit que : $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)$.

Méthode : Factoriser un trinôme

Vidéo https://youtu.be/eKrZK1Iisc8

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

Correction

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:
Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$
Les racines sont : $x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4} = \frac{1}{4}$

On a donc :

$4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5))\left(x - \frac{1}{4}\right) = 4(x+5)\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:
Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

La racine unique est : $x_0 = -\frac{-6}{2\times 9} = \frac{1}{3}$

On a donc :

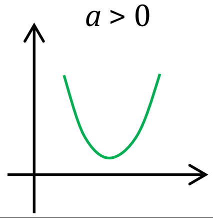
$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

2) Signe d'un trinôme

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

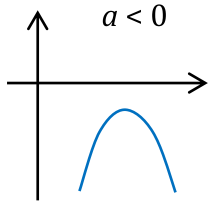
- Si $\Delta < 0$: f ne possède pas de racine. Donc f ne s'annule pas.

$a > 0$



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

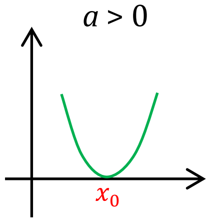
$a < 0$



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-$

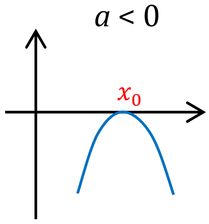
- Si $\Delta = 0$: f possède une unique racine x_0. Donc f s'annule en x_0.

$a > 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

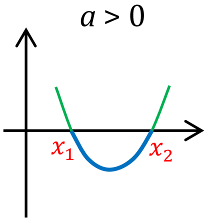
$a < 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

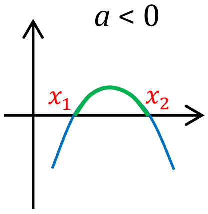
- Si $\Delta > 0$: f possède deux racines x_1 et x_2. Donc f s'annule en x_1 et x_2.

$a > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a < 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

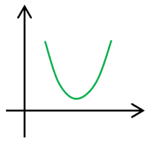
Méthode : Déterminer le signe d'un trinôme

Vidéo https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q
Vidéo https://youtu.be/sFNW9KVsTMY
Vidéo https://youtu.be/JCVotquzIIA

Démontrer que la fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + x + 4$ est positive.

Correction

Le discriminant de $2x^2 + x + 4$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 4 = -31 < 0$
La fonction f ne possède pas de racine.
La parabole représentant f se trouve donc soit au-dessus de l'axe des abscisses, soit en dessous.
Comme $a = 2 > 0$, la parabole a les branches tournées vers le haut (en position « 😊 ») et donc elle se trouve au-dessus de l'axe des abscisses.
On en déduit que f est toujours positive.



Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

Vidéo https://youtu.be/AEL4qKKNvp8

Résoudre les inéquations : a) $x^2 - 2x - 15 < 0$
b) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

Correction

a) Le discriminant de $x^2 - 2x - 15$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$ et ses racines sont :
$x_1 = \frac{2-\sqrt{64}}{2\times1} = -3$ et $x_2 = \frac{2+\sqrt{64}}{2\times1} = 5$

On obtient le tableau de signes : a =1> 0

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit dans le tableau de signes que $x^2 - 2x - 15 < 0$ pour $-3 < x < 5$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 15 < 0$ est donc $S =]-3\,;5[$.

b) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier le signe d'un trinôme :
$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$
$x^2 + 3x - 5 + x - 2 < 0$
$x^2 + 4x - 7 < 0.$

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :
$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = \frac{-4-2\sqrt{11}}{2} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

On lit dans le tableau de signes que $x^2 + 4x - 7 < 0$ pour $-2 - \sqrt{11} < x < -2 + \sqrt{11}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc :
$S = \left]-2 - \sqrt{11} \,;\, -2 + \sqrt{11}\right[$.

3) Application

Méthode : Étudier la position de deux courbes

Vidéo https://youtu.be/EyxP5HIfyF4

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

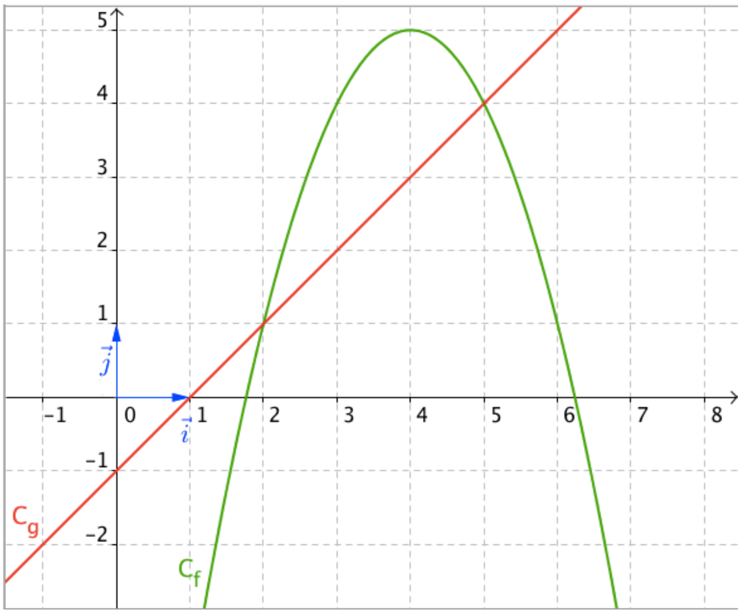
Correction

On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$:
$f(x) - g(x) = -x^2 + 8x - 11 - x + 1 = -x^2 + 7x - 10.$
Le discriminant du trinôme $-x^2 + 7x - 10$ est $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 9$
Le trinôme possède deux racines distinctes :
$x_1 = \frac{-7-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 5$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$

On dresse le tableau de signes du trinôme $-x^2 + 7x - 10$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		−	0	+	0	−	

On conclut :
● $f(x) - g(x) \leq 0$, soit $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $]-\infty \,; 2] \cup [5 \,; +\infty[$.
La courbe C_f est donc en-dessous de la courbe C_g pour tout x de $]-\infty \,; 2] \cup [5 \,; +\infty[$.
● De même, la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g pour tout x de $[2 \,; 5]$.


5
4
3
2
1
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
$\vec{j}$
$\vec{i}$
C_g
C_f