SECOND DEGRÉ – Chapitre 1/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/WVYWdN13kPE

Partie 1 : Fonction polynôme du second degré

Définition : On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :
Une fonction polynôme du second degré s'appelle également « trinôme ».

Exemples et contre-exemples :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 7x + 3 \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + \dfrac{3}{5} \\ h(x) = 4 - 2x^2 \\ k(x) = (x-4)(5-2x) \end{array}\right\} \text{ sont des fonctions polynômes du second degré.}$$

$m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme du premier degré (fonction affine).

$n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

Partie 2 : Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Propriété :
Toute fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres réels.}$$

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Démonstration :
Comme $a \neq 0$, on peut écrire :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$= a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x\right] + c$

$= a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c$

$= a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$
$= a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/JcT6kph74O0
Vidéo https://youtu.be/OQHf-hX9JhM

Soit la fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.
Écrire f sous sa forme canonique.

Correction

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :
$f(x) =$ ☺$(x -$ ☺$)^2 +$ ☺
où ☺, ☺ et ☺ sont des nombres réels.

$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$
$= 2[x^2 - 10x] + 10$
$= 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10$ ← car $x^2 - 10x$ est le début du développement
$= 2[(x-5)^2 - 25] + 10$ de $(x-5)^2$ et $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$
$= 2(x-5)^2 - 50 + 10$
$= 2(x-5)^2 - 40$

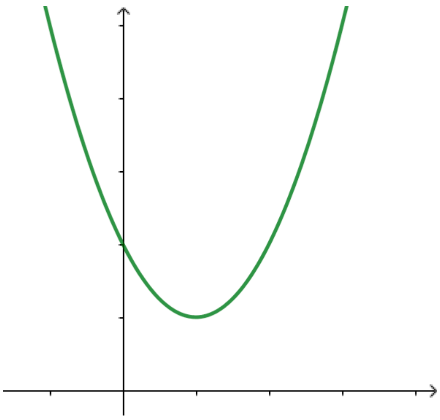
$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme canonique de f.

Partie 3 : Variations, extremum et représentation graphique

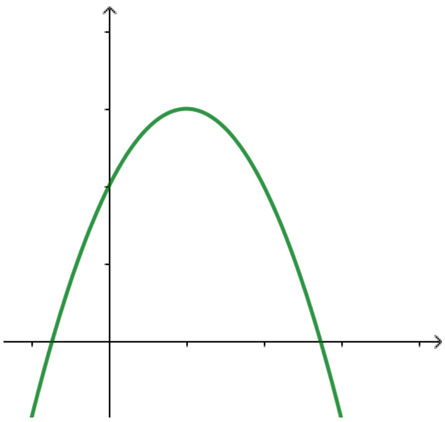
1) Variations

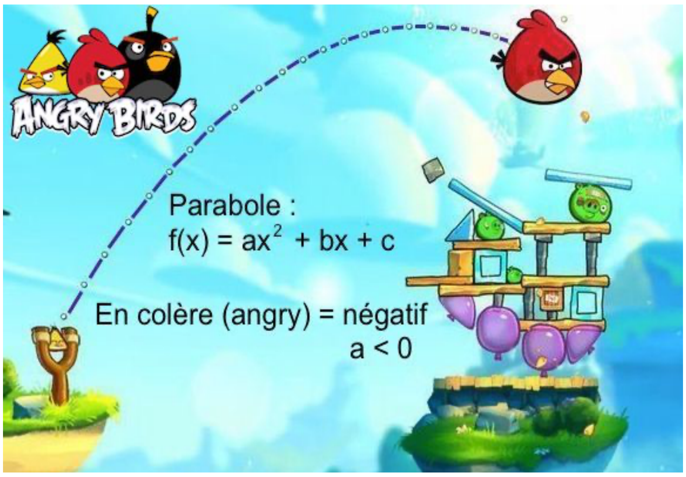
Propriétés :
Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante : « 😊 ».
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante : « ☹ ».

$a > 0$



$a < 0$





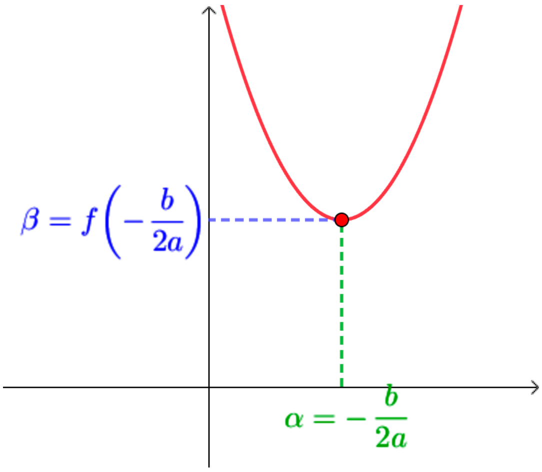
2) Extremum

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$
On a : $2(x-1)^2 \geq 0$
Donc : $2(x-1)^2 + 3 \geq 3$
Soit : $f(x) \geq 3$
Or : $f(1) = 3$ donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.
f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

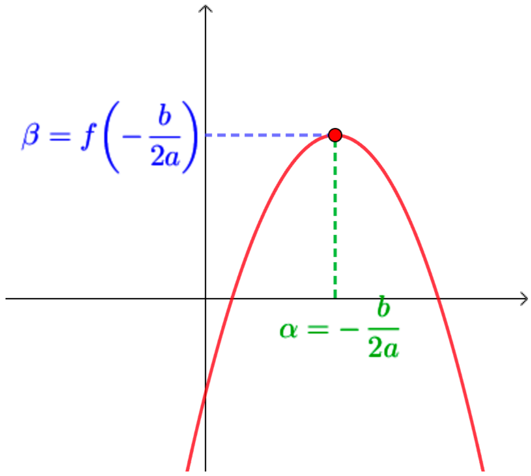
Propriété :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.
- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

Propriété : Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

Si $a > 0$:



Si $a < 0$:



Définition :
La représentation graphique d'une fonction polynôme f du second degré s'appelle une **parabole**.
Le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ s'appelle le **sommet** de la parabole.
Il correspond à l'extremum de la fonction f.

Propriété :
La parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

Vidéo https://youtu.be/7IOCVfUnoz0

Soit la fonction polynôme du second degré défini par $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$.
Déterminer le sommet de la parabole de f et son axe de symétrie.

Correction
- Les coordonnées du sommet de la parabole sont $(\alpha\ ;\ \beta)$, avec :

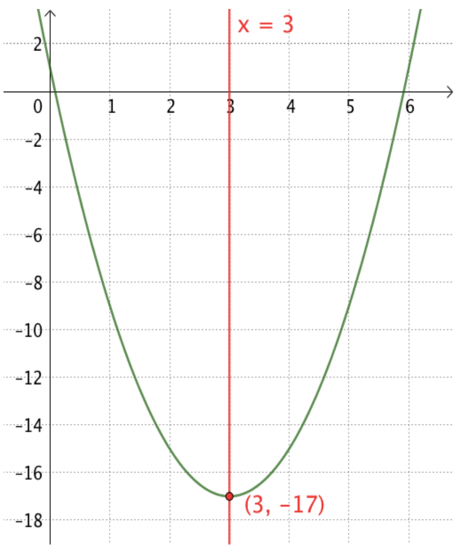
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$

$\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 1 = -17$

Le point de coordonnées $(3\ ;\ -17)$ est donc le sommet de la parabole.

Remarque : Comme $a = 2 > 0$, ce sommet correspond à un minimum.

- La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, soit $x = 3$.
La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole.



3) <u>Représentation graphique</u>

Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/KK76UohzUW4

Représenter graphiquement la fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Correction

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x \\ &= -(x^2 - 4x) \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -((x-2)^2 - 4) \\ &= -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

f admet donc un maximum en $\alpha = 2$ égal à $\beta = 4$.

Remarque : On peut aussi appliquer les formules $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

Les variations de f sont donc données dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

Pour représenter graphiquement la fonction f, on calcule les coordonnées de quelques points appartenant à la courbe :

$f(0) = -0^2 + 4 \times 0 = 0$

$f(1) = -1^2 + 4 \times 1 = -1 + 4 = 3$

On obtient d'autres points par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$.

On trace la courbe représentative de f ci-contre.