GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

I. Rappels sur les équations de droites

Rappels du cours de 2de en vidéo : https://youtu.be/d-rUnClmcCY

Critère de colinéarité :
$\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Vecteur directeur d'une droite :
Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b\,;a)$.

Propriété :
Les droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéo https://youtu.be/NosYmlLLFB4
Vidéo https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
1) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point A(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;5)$.
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points B(5 ; 3) et C(1 ; –3).

1) Soit un point M(x ; y) de la droite *d*.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\binom{x-3}{y-1}$ et $\vec{u}\binom{-1}{5}$ sont colinéaires, soit :
$5(x-3) - (-1)(y-1) = 0$.
Soit encore : $5x + y - 16 = 0$.
Une équation cartésienne de *d* est : $5x + y - 16 = 0$.

Remarque :
Une autre méthode consiste à appliquer le premier théorème énoncé plus haut.
Ainsi, comme $\vec{u}(-1\,;5)$ est un vecteur directeur de *d*, une équation de *d* est de la forme : $5x + 1y + c = 0$.
Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

2) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de *d'*.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-5\\-3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$.
Une équation cartésienne de *d'* est de la forme : $-6x+4y+c=0$.
B(5 ; 3) appartient à *d'* donc : –6 x 5 + 4 x 3 + c = 0 donc c = 18.
Une équation cartésienne de *d'* est : $-6x+4y+18=0$ ou encore $3x-2y-9=0$.

Tracer une droite dans un repère :

Vidéo https://youtu.be/EchUv2cGtzo

Équation cartésienne et équation réduite

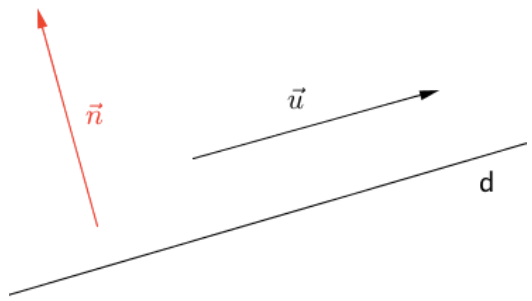
Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite. $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$
Le coefficient directeur de D est $-\frac{a}{b}$, son ordonnée à l'origine est $-\frac{c}{b}$ et un vecteur directeur de D est $\left(1\,;\,-\frac{a}{b}\right)$.

Exemple :
Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne $4x+y-6=0$.
Son équation réduite est $y=-4x+6$.

Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et réciproquement :
Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

II. Équation de droite de vecteur normal donné

Définition : Soit une droite *d*.
On appelle **vecteur normal** à une droite *d*, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.



Exemple :
Soit la droite *d* d'équation cartésienne $2x-3y-6=0$.
Un vecteur directeur de *d* est : $\vec{u}(3\,;2)$.
Un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ de *d* est tel que : $\vec{u}.\vec{n}=0$
Soit : $3a+2b=0$.
a = –2 et b = 3 conviennent, ainsi le vecteur $\vec{n}(-2\,;3)$ est un vecteur normal de *d*.

Propriétés : - Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite *d* d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

Démonstrations :
- Soit un point A$(x_A\,;\,y_A)$ de la droite *d*.
M$(x\,;y)$ est un point de *d* si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
Soit encore : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
$ax+by-ax_A-by_A=0$.
- Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de *d* alors $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de *d*.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vérifie : $-b\times a+a\times b=0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Vidéo https://youtu.be/oR5QoWCiDlo

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère la droite *d* passant par le point $A(-5\,;4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite *d*.

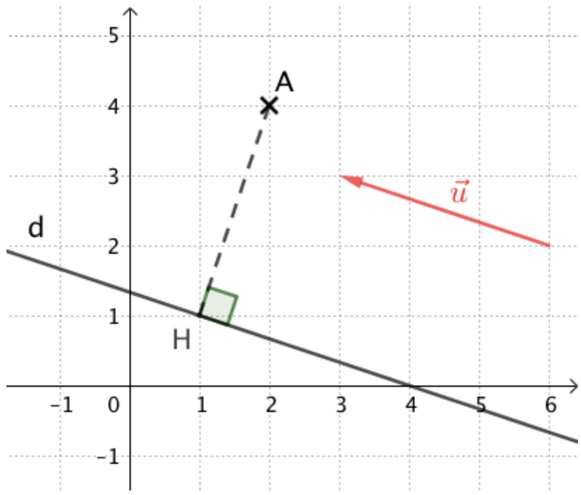
Comme $\vec{n}(3\,;-1)$ est un vecteur normal de *d*, une équation cartésienne de *d* est de la forme $3x-y+c=0$
Le point $A(-5\,;4)$ appartient à la droite *d*, donc : $3\times(-5)-4+c=0$ et donc : $c=19$.
Une équation cartésienne de *d* est : $3x-y+19=0$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Vidéo https://youtu.be/-HNUbyU72Pc

Soit la droite *d* d'équation $x+3y-4=0$ et le point A de coordonnées (2 ; 4).
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite *d*.

- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :



Comme *d* et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de *d* est un vecteur normal de (AH).
Une équation cartésienne de *d* est $x + 3y - 4 = 0$, donc le vecteur $\vec{u}(-3\,;1)$ est un vecteur directeur de *d*.
Et donc $\vec{u}(-3\,;1)$ est un vecteur normal de (AH).
Une équation de (AH) est de la forme $-3x + y + c = 0$.

Or, le point A(2 ; 4) appartient à (AH), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.
On a : $-3 \times 2 + 4 + c = 0$ soit $c = 2$.
Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.

- H est le point d'intersection de *d* et (AH), donc ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -3y + 4 \\ -3(-3y + 4) + y + 2 = 0 \end{cases}$ soit encore $\begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases}$

soit enfin $\begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Le point H, projeté orthogonal de A sur la droite *d*, a pour coordonnées (1 ; 1).

III. Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r est :
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Éléments de démonstration :
Tout point $M(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r si et seulement $AM^2 = r^2$.

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

Vidéo https://youtu.be/Nr4Fcr-GhXM

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère le cercle *C* de centre $A(4\,;-1)$ et passant par le point $B(3\,;5)$.
Déterminer une équation du cercle *C*.

Commençons par déterminer le carré du rayon du cercle *C* :
$r^2 = AB^2 = (3-4)^2 + \left(5-(-1)\right)^2 = 37$
Une équation cartésienne du cercle *C* est alors : $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 37$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

Vidéo https://youtu.be/nNidpOAhLE8

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$. Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$
$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 = 0$
$(x-1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 + 17 = 0$
$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$
$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 3^2$

L'ensemble E est le cercle de centre le point de coordonnées (1 ; 5) et de rayon 3.