GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/EehP4SFpo5c**](https://youtu.be/EehP4SFpo5c)

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

**Partie 1 : Rappels**

 **Rappels du cours de 2de en vidéo :** [**https://youtu.be/d-rUnClmcCY**](https://youtu.be/d-rUnClmcCY)

Propriétés :

● Un vecteur directeur d’une droite d’équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $\vec{u}\left(\begin{array}{c}-b\\a\end{array}\right)$.

$● \vec{u}\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right)$ sont colinéaires si et seulement si $xy’-yx’=0$.

● Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu’elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

● Soit deux points $A\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $B\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right)$.

La distance $AB $(ou la norme de $\vec{AB}$) est : $AB=$ $\sqrt{\left(x\_{B}-x\_{A}\right)^{2}+\left(y\_{B}-y\_{A}\right)^{2}}$.

Les coordonnées du milieu du segment [$AB$] sont : $\left(\begin{array}{c}\frac{x\_{A}+x\_{B}}{2}\\\frac{y\_{A}+y\_{B}}{2}\end{array}\right)$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/NosYmlLLFB4**](https://youtu.be/NosYmlLLFB4)

Déterminer une équation cartésienne de la droite $d$ passant par le point $A\left(\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$.

**Correction**

La droite $d$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$.

* Comme $\vec{u}$ $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$ est un vecteur directeur de $d$, on a : $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}\right)$

Soit $a=5$ et $b=1$.

Une équation de $d$ est donc de la forme $5x+1y+c=0$.

* Pour déterminer $c$, il suffit de substituer les coordonnées $\left(\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right)$ de $A$ dans l'équation :

$$5×3+1×1+c=0$$

$$15+1+c=0$$

$$16+c=0$$

$$c=-16$$

Une équation de $d$ est donc $5x+y-16=0$.

**Remarque**

Une autre méthode consiste à utiliser la colinéarité :

Soit un point $M\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ de la droite $d$.

Comme le point $A$ appartient également à $d$, les vecteurs $\vec{AM}\left(\begin{matrix}x-3\\y-1\end{matrix}\right)$ et $\vec{u}\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$ sont colinéaires, soit :

$5\left(x-3\right)-\left(-1\right)\left(y-1\right)=0$.

Soit encore : $5x+y-16=0$.

Une équation cartésienne de $d$ est : $5x+y-16=0$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/i5WD8IZdEqk**](https://youtu.be/i5WD8IZdEqk)

Déterminer une équation cartésienne de la droite $d$ passant par les points $B\left(\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right)$ et $C\left(\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}\right)$.

**Correction**

● $B$ et $C$ appartiennent à $d$ donc $\vec{BC}$ est un vecteur directeur de $d$.

On a : $\vec{BC}\left(\begin{matrix}1-5\\-3-3\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-4\\-6\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}\right)$. Donc $a=-6$ et $b=4$.

Une équation cartésienne de $d$ est de la forme : $-6x+4y+c=0$.

$● B\left(\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right)$ appartient à $d$ donc : $-6×5+4×3+c=0$ donc $c=18$.

Une équation cartésienne de $d$ est : $-6x+4y+18=0$ ou encore $-3x+2y+9=0$.

**Tracer une droite dans un repère :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/EchUv2cGtzo**](https://youtu.be/EchUv2cGtzo)

**Partie 2 : Vecteur normal à une droite**

Définition : Soit une droite $d$.

On appelle **vecteur normal** à la droite $d$, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $d$.

 $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d

 $\vec{n}$ est un vecteur normal de d

Propriété : - Une droite de vecteur normal $\vec{n}\left(\begin{array}{c}a\\b\end{array}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ où $c$ est un nombre réel à déterminer.

- Réciproquement, la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{n}\left(\begin{array}{c}a\\b\end{array}\right)$ pour vecteur normal.

Démonstration :

- Soit un point $A\left(\begin{array}{c}x\_{A}\\y\_{A}\end{array}\right)$ de la droite.

$M\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)$ est un point de la droite si et seulement si $\vec{AM}\left(\begin{matrix}x-x\_{A}\\y-y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $\vec{n}\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)$ sont orthogonaux.

Soit : $\vec{AM}.\vec{n}=0$

Soit encore : $a\left(x-x\_{A}\right)+b\left(y-y\_{A}\right)=0$

$ax+by-ax\_{A}-by\_{A}=0$.

- Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de la droite alors $\vec{u}\left(\begin{array}{c}-b\\a\end{array}\right)$ est un vecteur directeur de la droite.

Le vecteur $\vec{n}\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)$ vérifie : $\vec{u} .\vec{n}=-b×a+a×b=0$ .

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Et donc $\vec{n}\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)$ est un vecteur normal de la droite.

Exemple :

Soit la droite d'équation cartésienne $2x-3y-6=0$.

Un vecteur normal de la droite est $\vec{n}\left(\begin{array}{c}2\\-3\end{array}\right)$.
Un vecteur directeur de la droite est : $\vec{u}\left(\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right)$.

On vérifie que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : $\vec{u} .\vec{n}=2×3+\left(-3\right)×2=0$

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

 **Vidéo** [**https://youtu.be/oR5QoWCiDIo**](https://youtu.be/oR5QoWCiDIo)

On considère la droite $d$ passant par le point $A\left(\begin{array}{c}-5\\4\end{array}\right)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\left(\begin{array}{c}3\\-1\end{array}\right)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite $d$.

**Correction**

● Comme $\vec{n}\left(\begin{array}{c}3\\-1\end{array}\right)$ est un vecteur normal de $d$, une équation cartésienne de $d$ est de la forme $3x-y+c=0$

● Le point $A\left(\begin{array}{c}-5\\4\end{array}\right)$ appartient à la droite $d$, donc : $3×\left(-5\right)-4+c=0$ et donc :

$c=19$.

Une équation cartésienne de $d$ est : $3x-y+19=0$.

**Remarque**

Une autre méthode consiste à utiliser le produit scalaire :

Soit un point $M\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ de la droite $d$.

Comme le point $A$ appartient également à $d$, les vecteurs $\vec{AM}\left(\begin{matrix}x+5\\y-4\end{matrix}\right)$ et $\vec{n}\left(\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right)$ sont orthogonaux, soit :

$3\left(x+5\right)+\left(-1\right)\left(y-4\right)=0$.

Soit encore : $3x-y+19=0$.

Une équation cartésienne de $d$ est : $3x-y+19=0$.

* Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d’un point sur une droite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-HNUbyU72Pc**](https://youtu.be/-HNUbyU72Pc)

Soit la droite $d$ d’équation $x+3y-4=0$ et le point $A\left(\begin{array}{c}2\\4\end{array}\right)$.

Déterminer les coordonnées du point $H$, projeté orthogonal de $A$ sur la droite $d$.

**Correction**

- On commence par déterminer une équation de la droite ($AH$) :

Comme $d$ et ($AH$) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de $d$ est un vecteur normal de ($AH$).

Une équation cartésienne de $d$ est $x+3y-4=0$, donc le vecteur $\vec{u}\left(\begin{array}{c}-3\\1\end{array}\right)$ est un vecteur directeur de $d$.

Et donc $\vec{u}\left(\begin{array}{c}-3\\1\end{array}\right)$ est un vecteur normal de ($AH$).

Une équation de ($AH$) est de la forme :

 $-3x+y+c=0$.

Or, le point $A\left(\begin{array}{c}2\\4\end{array}\right) $appartient à ($AH$), donc ses coordonnées vérifient l’équation de la droite.

On a : $-3×2+4+c=0$ soit $c=2$.

Une équation de ($AH$) est donc : $-3x+y+2=0$.

- $H$ est le point d’intersection de $d$ et ($AH$), donc ses coordonnées $\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$\left\{\begin{matrix}x+3y-4=0\\-3x+y+2=0\end{matrix}\right.$

$\left\{\begin{matrix}x=-3y+4 \\-3\left(-3y+4\right)+y+2=0\end{matrix}\right.$

$\left\{\begin{matrix}x=-3y+4 \\9y-12+y+2=0\end{matrix}\right.$

$\left\{\begin{matrix}x=-3y+4\\10y-10=0\end{matrix}\right.$

$\left\{\begin{matrix}x=-3y+4\\y=\frac{10}{10}=1 \end{matrix}\right.$

$$\left\{\begin{matrix}x=-3×1+4=1\\y=1 \end{matrix}\right.$$

Le point $H$, projeté orthogonal de $A$ sur la droite $d$, a pour coordonnées $\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right)$.

**Partie 3 : Équations de cercle**

Propriété : Une équation du cercle de centre $A\left(\begin{array}{c}x\_{A}\\y\_{A}\end{array}\right)$ et de rayon $r$ est :

$$\left(x-x\_{A}\right)^{2}+\left(y-y\_{A}\right)^{2}=r^{2}$$

Éléments de démonstration :

Tout point $M\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)$ appartient au cercle de centre $A\left(\begin{array}{c}x\_{A}\\y\_{A}\end{array}\right)$ et de rayon $r$ si et seulement $AM^{2}=r^{2}$.

Exemple :

Le cercle de de centre $A\left(\begin{array}{c}3\\-1\end{array}\right)$ et de rayon $5$ a pour équation : $\left(x-3\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}=25$

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Nr4Fcr-GhXM**](https://youtu.be/Nr4Fcr-GhXM)

On considère le cercle de centre $A\left(\begin{array}{c}4\\-1\end{array}\right)$ et passant par le point $B\left(\begin{array}{c}3\\5\end{array}\right)$.

Déterminer une équation du cercle.

**Correction**

● Le cercle a pour centre le point $A\left(\begin{array}{c}4\\-1\end{array}\right)$ donc une équation du cercle est de la forme :

$$\left(x-4\right)^{2}+\left(y-(-1)\right)^{2}=r^{2}$$

$$\left(x-4\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}=r^{2}$$

● On détermine le carré du rayon du cercle à l’aide de la formule de la distance :

$$r^{2}=AB^{2}=\left(3-4\right)^{2}+\left(5-\left(-1\right)\right)^{2}=\left(-1\right)^{2}+6^{2}=37$$

● Une équation cartésienne du cercle est alors : $\left(x-4\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}=37$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/nNidpOAhLE8**](https://youtu.be/nNidpOAhLE8)

L’équation $x^{2}+y^{2}-2x-10y+17=0$ est-elle une équation de cercle ? Si oui, déterminer son centre et son rayon.

**Correction**

← car $x^{2}-2x$ est le début du développement de $\left(x-1\right)^{2} $

et $\left(x-1\right)^{2}=x^{2}-2x+1$

$$x^{2}+y^{2}-2x-10y+17=0$$

$\left(x^{2}-2x\right)+\left(y^{2}-10y\right)+17=0$

$$\left(x^{2}-2x+1\right)-1+\left(y^{2}-10y+25\right)-25+17=0$$

$$\left(x-1\right)^{2}-1+\left(y-5\right)^{2}-25+17=0$$

$$\left(x-1\right)^{2}+\left(y-5\right)^{2}=9$$

$$\left(x-1\right)^{2}+\left(y-5\right)^{2}=3^{2}$$

Il s’agit d’une équation du cercle de centre $A\left(\begin{array}{c}1\\5\end{array}\right)$ et de rayon 3.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)