

PUISSANCES ET RACINES CARRÉES

▶ Tout le cours sur les puissances en vidéo : <https://youtu.be/XA-JkXirNz4>

▶ Tout le cours sur les racines carrées en vidéo : <https://youtu.be/8Atxa6iMVsw>

I. Calculs sur les puissances

1) Exemples

3 à la puissance 4	5 à la puissance 3	0 à la puissance 6	1 à la puissance 5	9 à la puissance 1	-3 à la puissance 4
3^4	5^3	0^6	1^5	9^1	$(-3)^4$
$3 \times 3 \times 3 \times 3$	$5 \times 5 \times 5$	$0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0$	$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$	9	$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
81	125	0	1	9	81

$a^4 = a \times a \times a \times a$ et de façon générale $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (avec n facteurs a)

2) Cas particuliers

$$a^1 = a \text{ pour tout nombre } a$$

$$a^0 = 1 \text{ pour tout nombre } a \text{ (non nul)}$$

$$0^p = 0 \text{ pour tout nombre } p \text{ (non nul)}$$

$$1^p = 1 \text{ pour tout nombre } p$$

3) Attention aux signes !

Ne pas confondre : $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
 et : $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$

Calculer de même en appliquant la règle des signes :
 $(-5)^2$; -1^2 ; $(-1)^2$; -3^3 ; $(-2)^2$; -7^2 ; $(-9)^0$; -9^0

Réponses : 25 ; -1 ; 1 ; -27 ; 4 ; -49 ; 1 ; -1

4) Opérations sur les puissances

Avec $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a^n)^p = a^{n \times p}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$
----------------------------	-----------------------------	----------------------------	-----------------------------------

$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
------------------------	--------------------------

It is really hard to believe that

DIVERTISSEMENT

$$0^0+3^0+5^0+6^0+9^0+10^0+12^0+15^0=1^0+2^0+4^0+7^0+8^0+11^0+13^0+14^0,$$

$$0^1+3^1+5^1+6^1+9^1+10^1+12^1+15^1=1^1+2^1+4^1+7^1+8^1+11^1+13^1+14^1,$$

$$0^2+3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2=1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2,$$

$$0^3+3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3=1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3.$$

Méthode : Effectuer des calculs sur les puissances

▶ Vidéo <https://youtu.be/FBmVDGvUtJ4>

▶ Vidéo <https://youtu.be/cY6xdxT7kLM>

Exprimer sous la forme d'une seule puissance :

$$A = 4^5 \times 4^7$$

$$B = \frac{5^4}{5^6}$$

$$C = 7^3 \times (7^2)^6$$

$$D = 6^7 \times 9^7$$

$$A = 4^5 \times 4^7$$

$$= 4^{5+7}$$

$$= 4^{12}$$

$$B = \frac{5^4}{5^6}$$

$$= 5^{4-6}$$

$$= 5^{-2}$$

$$C = 7^3 \times (7^2)^6$$

$$= 7^3 \times 7^{2 \times 6}$$

$$= 7^3 \times 7^{12}$$

$$= 7^{3+12}$$

$$= 7^{15}$$

$$D = 6^7 \times 9^7$$

$$= (6 \times 9)^7$$

$$= 54^7$$

II. Calculs sur les racines carrées

1) Définition

Exemples : $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$

$2,6^2 = 6,76$ donc $\sqrt{6,76} = 2,6$

La racine carrée de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a .

Remarque :

$$\sqrt{-5} = ?$$

La racine carrée de -5 est le nombre dont le carré est -5 !

Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.

$\sqrt{-5}$ n'existe pas !

Quelques exemples : $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{2} \approx 1,4142$ $\sqrt{3} \approx 1,732$
 $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.

Racines de carrés parfaits

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{169} = 13$

2) Propriétés sur les racines carrées

a) Exemples :

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = +5 = 5$$

$$\sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9$$

Pour un nombre a positif, on a $\sqrt{a^2} = a$
 Pour un nombre a négatif, on a $\sqrt{a^2} = -a$

Remarque : La racine carrée est un nombre positif.

b) Opérations sur les racines carrées

a	b	\sqrt{a}	\sqrt{b}	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a-b}$	$\sqrt{a \times b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
9	16	3	4	7	-1	12	0,75	5	Imp.	12	0,75
25	4	5	2	7	3	10	2,5	$\approx 5,4$	$\approx 4,6$	10	2,5
36	16	6	4	10	2	24	1,5	$\approx 7,2$	$\approx 4,5$	24	1,5

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad (\sqrt{a})^2 = a$$

Démonstration au programme : Pour le produit :

 **Vidéo** <https://youtu.be/qzp16wnchaU>

- $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$
- $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$ car a et b sont positifs

Donc $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a \times b})^2$ et donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Remarque :

Par contre,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

Démonstration au programme :

 **Vidéo** <https://youtu.be/fkE5KngvcCA>

On va démontrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

En effet, on a par exemple :

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
- $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$

Donc $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$

Et donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les racines carrées

 **Vidéo** <https://youtu.be/CrTjK3Qa72s>

Écrire le plus simplement possible :

$$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$$

$$C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3}$$

$$D = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

$$E = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$$

$$F = (4\sqrt{5})^2$$

$$G = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{10}}{\sqrt{80}}$$

$$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$$

$$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$$

$$D = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$E = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{50}{72}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

$$F = (4\sqrt{5})^2 = 16 \times (\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$$

$$G = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{10}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{32 \times 10}{80}} = \sqrt{4} = 2$$

3) Extraire un carré parfaitMéthode : Extraire un carré parfait
 Vidéo https://youtu.be/cz27kb_qTy4
Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :

$$A = \sqrt{72} \quad B = \sqrt{45} \quad C = 3\sqrt{125}$$

$$A = \sqrt{72}$$

$$= \sqrt{9 \times 8}$$

← On fait « apparaître » dans 72 un carré parfait : 9

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{8}$$

← On extrait cette racine en appliquant une formule

$$= 3 \times \sqrt{8}$$

← On simplifie la racine du carré parfait

$$= 3 \times \sqrt{4 \times 2}$$

← On recommence si possible

$$= 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$= 3 \times 2 \times \sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

← On s'arrête, 2 ne « contient » pas de carré parfait

$$B = \sqrt{45}$$

$$= \sqrt{9 \times 5}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

$$C = 3\sqrt{125}$$

$$= 3\sqrt{25 \times 5}$$

$$= 3 \times 5\sqrt{5}$$

$$= 15\sqrt{5}$$

Remarque : Pour que b soit le plus petit possible, b ne doit pas contenir de carré parfait.

Curiosité :

The "four fours"

$(4 + 4) - (4 + 4) = 0$	$(44 - 4)/4 = 10$
$(4 + 4)/(4 + 4) = 1$	$44/(\sqrt{4} \times \sqrt{4}) = 11$
$(4/4) + (4/4) = 2$	$4 \times (4 - (4/4)) = 12$
$4 - (4^{4-4}) = 3$	$(44/4) + \sqrt{4} = 13$
$4 + ((4 - 4) \times 4) = 4$	$4 + 4 + 4 + \sqrt{4} = 14$
$4 + (4^{4-4}) = 5$	$(44/4) + 4 = 15$
$4 + ((4 + 4)/4) = 6$	$(4^{4/4}) \times 4 = 16$
$(4 + 4) - (4/4) = 7$	$(4 \times 4) + (4/4) = 17$
$(4 + 4) + (4 - 4) = 8$	$(4 \times 4) + 4 - \sqrt{4} = 18$
$(4 + 4) + (4/4) = 9$	$4! - 4 - (4/4) = 19$
$(4 \times 4) + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 20$	

4) Simplifier les écritures contenant des racines carrées

Méthode : Simplifier une écriture contenant des racines carrées

▶ Vidéo <https://youtu.be/8pB5pg2MyDM>

▶ Vidéo <https://youtu.be/MXJYntzumDo>

1) Écrire le plus simplement possible :

$$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

$$C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3})$$

2) Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible :

$$D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$$

$$E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$$

1) On regroupe les membres d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression.

Les différentes familles de racines carrées sont : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \dots$

$$\begin{aligned} A &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5} \\ &= 15\sqrt{2} - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3}) \\ &= 3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3} \\ &= -1 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

2) On fait apparaître **des racines carrées d'une même famille**. Pour cela, il faut **extraire des carrés parfaits**.

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27} && \leftarrow \sqrt{12} \text{ et } \sqrt{27} \text{ sont des « } \sqrt{3} \text{ déguisées »} \\ &= \sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3} && \leftarrow \text{Elles sont maintenant « démasquées » !} \\ &= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} && \leftarrow \text{On peut alors réduire l'expression} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80} \\ &= \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5} \\ &= 5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5} = 25\sqrt{5} \end{aligned}$$

5) Racines carrées et développementsMéthode : Effectuer des développements avec des racines carrées
 **Vidéo** https://youtu.be/xmtZS0GwV_Y

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a , b et c sont des entiers relatifs :

$$A = (\sqrt{3} - 4)^2$$

$$B = (3 + \sqrt{5})^2$$

$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$D = (3 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})$$

← On applique les règles classiques de développement d'une expression comme on pourrait le faire sur des expressions algébriques. Les radicaux sont alors « traités » comme l'inconnue.

$$A = (\sqrt{3} - 4)^2$$

$$= (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 4 + 4^2$$

$$= 3 - 8\sqrt{3} + 16$$

$$= 19 - 8\sqrt{3}$$

← On applique la 2^e identité remarquable

$$B = (3 + \sqrt{5})^2$$

$$= (3)^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$$

$$= 9 + 6\sqrt{5} + 5$$

$$= 14 + 6\sqrt{5}$$

← On applique la 1^{ère} identité remarquable

$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$= 2 - 5$$

$$= -3$$

← On applique la 3^e identité remarquable

$$D = (3 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})$$

$$= 12 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^2$$

$$= 12 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2 \times 3$$

$$= 6 - 2\sqrt{3}$$

← On applique la double distributivité



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales