FRACTIONS, PUISSANCES, RACINES CARRÉES

Tout le cours sur les fractions en vidéo : https://youtu.be/a0Qb812W75c
Tout le cours sur les puissances en vidéo : https://youtu.be/XA-JkXirNz4
Tout le cours sur les racines carrées en vidéo : https://youtu.be/8Atxa6iMVsw

Partie 1 : Fractions

1. Calcul avec les fractions (Rappels)

Propriétés :

$$\frac{a}{D}+\frac{b}{D}=\frac{a+b}{D} \qquad \frac{a}{D}-\frac{b}{D}=\frac{a-b}{D} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Méthode : Effectuer des calculs de fractions

Vidéo https://youtu.be/1yV5scwCwvg

$$A=\frac{5}{4}+\frac{6}{16} \qquad B=\frac{5}{3}-\frac{6}{5} \qquad C=\frac{2}{-3}\times\frac{-5}{11} \qquad D=\frac{3}{4}:\frac{-5}{8} \qquad E=\frac{8}{7}-\frac{4}{7}\times\frac{5}{3}$$

Correction

$$A=\frac{5}{4}+\frac{6}{16}=\frac{5\times4}{4\times4}+\frac{6}{16}=\frac{20}{16}+\frac{6}{16}=\frac{20+6}{16}=\frac{26}{16}=\frac{13}{8}$$

$$B=\frac{5}{3}-\frac{6}{5}=\frac{5\times5}{3\times5}-\frac{6\times3}{5\times3}=\frac{25}{15}-\frac{18}{15}=\frac{25-18}{15}=\frac{7}{15}$$

$$C=\frac{2}{-3}\times\frac{-5}{11}=\frac{2\times(-5)}{(-3)\times11}=\frac{-10}{-33}=\frac{10}{33}$$

$$D=\frac{3}{4}:\frac{-5}{8}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{-5}=\frac{24}{-20}=-\frac{6}{5}$$

$$E=\frac{8}{7}-\frac{4}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{8}{7}-\frac{20}{21}$$

$$= \frac{24}{21} - \frac{20}{21}$$
$$= \frac{4}{21}$$

2. Réduire des expressions au même dénominateur

Propriété :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+cb}{bd}$$

Méthode : Réduire au même dénominateur

Vidéo https://youtu.be/Id_udNTKsqI

Réduire les expressions suivantes au même dénominateur :

$$A = \frac{7}{x-2} - \frac{5}{3} \qquad B = 3 + \frac{5x}{2x+1}$$

Correction

$$A = \frac{7}{x-2} - \frac{5}{3}$$
$$= \frac{7 \times 3}{(x-2) \times 3} - \frac{5(x-2)}{3(x-2)}$$
$$= \frac{21 - 5(x-2)}{3(x-2)}$$
$$= \frac{21 - 5x + 10}{3(x-2)}$$
$$= \frac{31 - 5x}{3(x-2)}$$

$$B = 3 + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3}{1} + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3(2x+1)}{1(2x+1)} + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3(2x+1) + 5x}{2x+1}$$
$$= \frac{6x + 3 + 5x}{2x+1}$$
$$= \frac{11x + 3}{2x+1}$$

Partie 2 : Puissances

1. Rappels

$a^4 = a \times a \times a \times a$
De façon générale :
$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$

Exemples :
$2^3 = 2 \times 2 \times 2$
$11^5 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11$

a est un nombre non nul et
n est un entier non nul.
$a^1 = a$
$a^0 = 1$
$0^n = 0$
$1^n = 1$

Exemples :
$15^1 = 15$
$103^0 = 1$
$0^4 = 0$
$1^{12} = 1$

2. Attention aux signes !

Ne pas confondre : $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
et : $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$

Exercice :
Calculer de même en appliquant la règle des signes :
$(-5)^2$; -1^2 ; $(-1)^2$; -3^3 ; $(-2)^2$; -7^2 ; $(-9)^0$; -9^0

Réponses : 25 ; -1 ; 1 ; -27 ; 4 ; -49 ; 1 ; -1

3. Opérations sur les puissances

It is really hard to believe that **DIVERTISSEMENT**
$0^0+3^0+5^0+6^0+9^0+10^0+12^0+15^0=1^0+2^0+4^0+7^0+8^0+11^0+13^0+14^0$,
$0^1+3^1+5^1+6^1+9^1+10^1+12^1+15^1=1^1+2^1+4^1+7^1+8^1+11^1+13^1+14^1$,
$0^2+3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2=1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2$,
$0^3+3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3=1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3$.

Avec n et p entiers relatifs :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a^n)^p = a^{n \times p}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les puissances

Vidéo https://youtu.be/FBmVDGvUtJ4
Vidéo https://youtu.be/cY6xdxT7kLM

Exprimer sous la forme d'une seule puissance :

$A = \dfrac{1}{4^2}$ $\qquad B = 4^5 \times 4^7$ $\qquad C = \dfrac{5^4}{5^6}$ $\qquad D = 7^3 \times (7^2)^6$ $\qquad E = 6^7 \times 9^7$

Correction

$A = \dfrac{1}{4^2} = 4^{-2}$

$B = 4^5 \times 4^7 = 4^{5+7} = 4^{12}$

$C = \dfrac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2}$

$D = 7^3 \times (7^2)^6 = 7^3 \times 7^{2\times 6} = 7^3 \times 7^{12} = 7^{3+12} = 7^{15}$

$E = 6^7 \times 9^7 = (6 \times 9)^7 = 54^7$

Méthode : Appliquer les formules sur les puissances de 10

Vidéo https://youtu.be/GWz5_veC12U
Vidéo https://youtu.be/EL4dBiBbL-U

a) Écrire sous la forme 10^n ou 10^{-n} :

$A = 10^4 \times 10^7$ $\qquad B = \dfrac{10^{-4}}{10^5}$ $\qquad C = (10^2)^{-6}$ $\qquad D = 10^{-4} \times (10^3)^{-1}$

b) Écrire en notation scientifique :

$A = 4 \times 7 \times 10^{-5} \times 10^{-8}$ $\qquad B = \dfrac{7 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^8}{56 \times 10^{-9}}$ $\qquad C = \dfrac{32 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-5}}$

Correction

a) $A = 10^4 \times 10^7 = 10^{4+7} = 10^{11}$

$B = \dfrac{10^{-4}}{10^5} = 10^{-4-5} = 10^{-9}$

$C = (10^2)^{-6} = 10^{2\times(-6)} = 10^{-12}$

$D = 10^{-4} \times (10^3)^{-1} = 10^{-4} \times 10^{3\times(-1)} = 10^{-4} \times 10^{-3} = 10^{-4-3} = 10^{-7}$

b) $A = 4 \times 7 \times 10^{-5} \times 10^{-8} = 28 \times 10^{-5-8}$

$B = \dfrac{7 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^8}{56 \times 10^{-9}} = \dfrac{7 \times 5}{56} \times \dfrac{10^{-4} \times 10^8}{10^{-9}}$

$C = \dfrac{32 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-5}} = \dfrac{0{,}0032 + 0{,}006}{2 \times 10^{-5}}$

$= 28 \times 10^{-13}$

$= 2{,}8 \times 10^{-12}$

$= 0{,}625 \times \dfrac{10^4}{10^{-9}}$

$= 0{,}625 \times 10^{13}$

$= 6{,}25 \times 10^{12}$

$= \dfrac{0{,}0092}{2 \times 10^{-5}}$

$= \dfrac{0{,}0092}{2} \times \dfrac{1}{10^{-5}}$

$= 0{,}0046 \times 10^5$

$= 4{,}6 \times 10^2$

Partie 3 : Racines carrées

1. Définition

Exemples :

- $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
- $2{,}6^2 = 6{,}76$ donc $\sqrt{6{,}76} = 2{,}6$
- $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$
- $\sqrt{3} \approx 1{,}732$

$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ s'écrivent avec un nombre infini de décimales, on les appelle des nombres irrationnels.

Définition :
La **racine carrée** de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a.

Racines de carrés parfaits :

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	

Remarque : $\sqrt{-5} =$?
La racine carrée de -5 est le nombre dont le carré est -5 !
Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.
$\sqrt{-5}$ n'existe pas !

2. Propriétés sur les racines carrées

Propriétés : a et b sont des nombres positifs.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$ $\qquad$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\qquad$ $\sqrt{a^2} = a$

⚠ De façon générale : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Démonstration au programme : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Vidéo https://youtu.be/gzp16wnchaU

- $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$
- $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$ car a et b sont positifs

Donc $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a \times b}\right)^2$ et donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Démonstration au programme : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$

Vidéo https://youtu.be/fkE5KngvcCA

On a par exemple :

- $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
- $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + b$

Donc $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a+b}\right)^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$

Et donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les racines carrées

Vidéo https://youtu.be/CrTjK3Qa72s

Écrire le plus simplement possible :

$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$ $\quad B = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$ $\quad C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3}$

$D = \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ $\quad E = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$ $\quad F = \left(4\sqrt{5}\right)^2$ $\quad G = \dfrac{\sqrt{32} \times \sqrt{10}}{\sqrt{80}}$

Correction

$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$

$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$

$C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$

$$D = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$E = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{50}{72}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

$F = \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 4^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 16 \times 5 = 80$

$G=\frac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}}=\sqrt{\frac{32\times10}{80}}=\sqrt{4}=2$

3. Extraire un carré parfait

Méthode : Extraire un carré parfait

Vidéo https://youtu.be/cz27kb_qTy4

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :

$A=\sqrt{72}$ $\quad B=\sqrt{45}$ $\quad C=3\sqrt{125}$

Correction

$A=\sqrt{72}$

$=\sqrt{36\times2}$ ← *On fait « apparaître » dans 72 le carré parfait 36*

$=\sqrt{36}\times\sqrt{2}$ ← *On extrait cette racine en appliquant une formule*

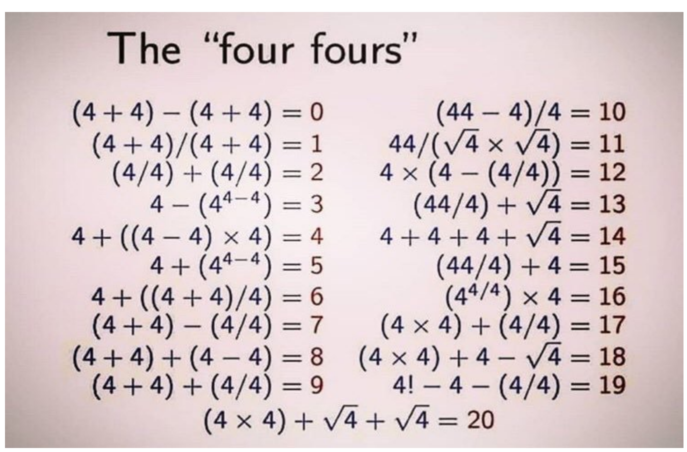
$=6\sqrt{2}$ ← *On simplifie la racine du carré parfait*

Pour que b soit le plus petit possible, b ne doit pas « contenir » de carré parfait.

$B=\sqrt{45}$
$=\sqrt{9\times5}$
$=\sqrt{9}\times\sqrt{5}$
$=3\sqrt{5}$

$C=3\sqrt{125}$
$=3\sqrt{25\times5}$
$=3\sqrt{25}\times\sqrt{5}$
$=3\times5\times\sqrt{5}$
$=15\sqrt{5}$

Curiosité :


The "four fours"

$(4+4)-(4+4)=0$
$(4+4)/(4+4)=1$
$(4/4)+(4/4)=2$
$4-(4^{4-4})=3$
$4+((4-4)\times4)=4$
$4+(4^{4-4})=5$
$4+((4+4)/4)=6$
$(4+4)-(4/4)=7$
$(4+4)+(4-4)=8$
$(4+4)+(4/4)=9$
$(44-4)/4=10$
$44/(\sqrt{4}\times\sqrt{4})=11$
$4\times(4-(4/4))=12$
$(44/4)+\sqrt{4}=13$
$4+4+4+\sqrt{4}=14$
$(44/4)+4=15$
$(4^{4/4})\times4=16$
$(4\times4)+(4/4)=17$
$(4\times4)+4-\sqrt{4}=18$
$4!-4-(4/4)=19$
$(4\times4)+\sqrt{4}+\sqrt{4}=20$

4. Simplifier les écritures contenant des racines carrées

Méthode : Simplifier une écriture contenant des racines carrées

Vidéo https://youtu.be/8pB5pq2MyDM
Vidéo https://youtu.be/MXJYntzumDo

1) Écrire le plus simplement possible :
$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
$C = \left(3 - 2\sqrt{3}\right) - \left(4 - 6\sqrt{3}\right)$

2) Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible :
$D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$
$E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$

Correction
1) On regroupe les membres d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression.
Les différentes familles de racines carrées sont : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$, ...
$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
$\quad = 8\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
$\quad = 15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

$C = \left(3 - 2\sqrt{3}\right) - \left(4 - 6\sqrt{3}\right)$
$\quad = 3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3}$
$\quad = -1 + 4\sqrt{3}$

2) On fait apparaître des racines carrées d'une même famille. Pour cela, il faut extraire des carrés parfaits.

$D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ $\leftarrow$ *$\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$ sont des « $\sqrt{3}$ déguisées »*
$\quad = \sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}$ $\leftarrow$ *Elles sont maintenant « démasquées » !*
$\quad = 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ $\leftarrow$ *On peut alors réduire l'expression*
$\quad = 6\sqrt{3}$

$E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$
$\quad = \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5}$
$\quad = 5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 24\sqrt{5}$
$= 25\sqrt{5}$

5. Racines carrées et développements

Méthode : Effectuer des développements avec des racines carrées

Vidéo https://youtu.be/xmtZS0GwV_Y

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = \left(\sqrt{3} - 4\right)^2$ $\quad$ $B = \left(3 + \sqrt{5}\right)^2$

$C = \left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ $\quad$ $D = \left(3 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)$

Correction

On applique les règles classiques de développement d'une expression comme on peut le faire en calcul littéral.
Les racines sont alors « traitées » comme une inconnue.

$A = \left(\sqrt{3} - 4\right)^2$ *← On applique la 2e identité remarquable*

$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 4 + 4^2$
$= 3 - 8\sqrt{3} + 16$
$= 19 - 8\sqrt{3}$

$B = \left(3 + \sqrt{5}\right)^2$ *← On applique la 1ère identité remarquable*

$= (3)^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2$
$= 9 + 6\sqrt{5} + 5$
$= 14 + 6\sqrt{5}$

$C = \left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ *← On applique la 3e identité remarquable*

$= \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$
$= 2 - 5$
$= -3$

$D = \left(3 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)$ *← On applique la double distributivité*

$= 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2}$
$= 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$