PRODUIT SCALAIRE (Partie 2)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/dlI7myZuLvo

I. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

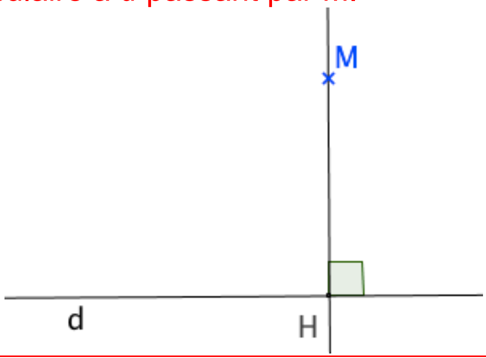
Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration :

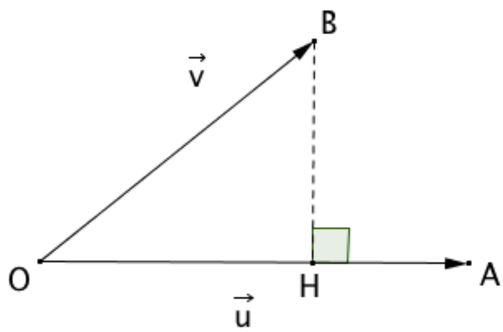
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.
$\vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

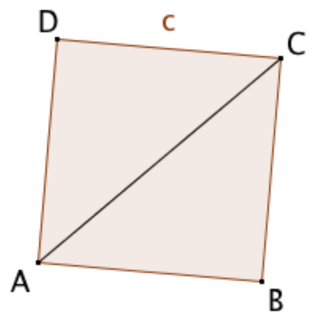


Démonstration :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right)$
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$
En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

Vidéo https://youtu.be/2eTsaa2vVnI
Vidéo https://youtu.be/K4lzn5xB_Qk
Vidéo https://youtu.be/-Hr28g0PFu0



Soit un carré ABCD de côté *c*.
Calculer, en fonction de *c*, les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

a) Par projection, on a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = c^2$

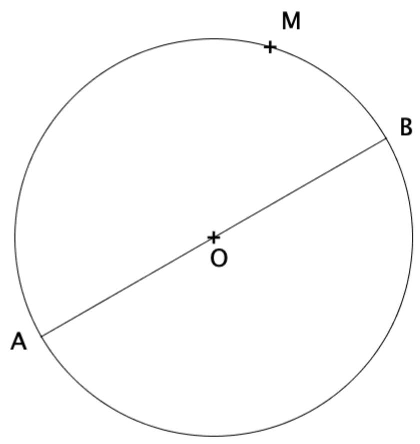
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} = -\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = -c^2$

3) Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété : L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration au programme :

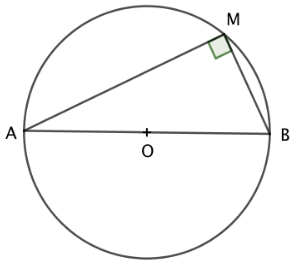


Soit O le milieu du segment [AB].
On a :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = 0$
Comme O est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$
Soit :
$\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0$ car $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$

Soit : $MO^2 = OA^2$ soit encore $MO = OA$.
M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété : Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Justification : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.



II. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration :

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$
$= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath}$
$= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\|\vec{\jmath}\|^2$
$= xx' + yy'$

car $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé,
et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Vidéo https://youtu.be/aOLRbG0libY

Vidéo https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ

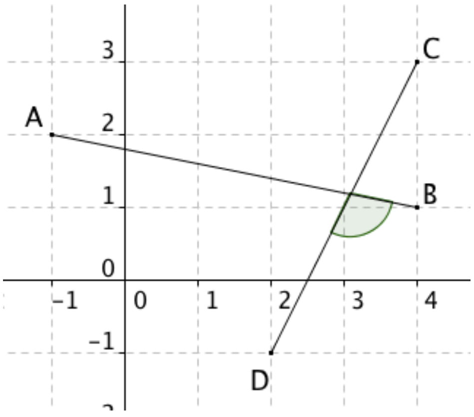
Soit $\vec{u}(5\,;\,-4)$ et $\vec{v}(-3\,;\,7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Vidéo https://youtu.be/ca_pW79ik9A

Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.



On a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})$

$= \sqrt{(4-(-1))^2+(2-1)^2} \times \sqrt{(4-2)^2+(3-(-1))^2} \times \cos(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})$

$= \sqrt{520} \times \cos(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})$

$= 2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})$

On a également : $\overrightarrow{AB}(5\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{CD}(-2\,;\,-4)$, donc :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ = 5 x (–2) + (–1) x (–4) = –6

On a ainsi : $2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}) = -6$

Et donc : $\cos(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}) = -\dfrac{6}{2\sqrt{130}} = -\dfrac{3}{\sqrt{130}}$

Et : $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}) \approx 105{,}3°$.